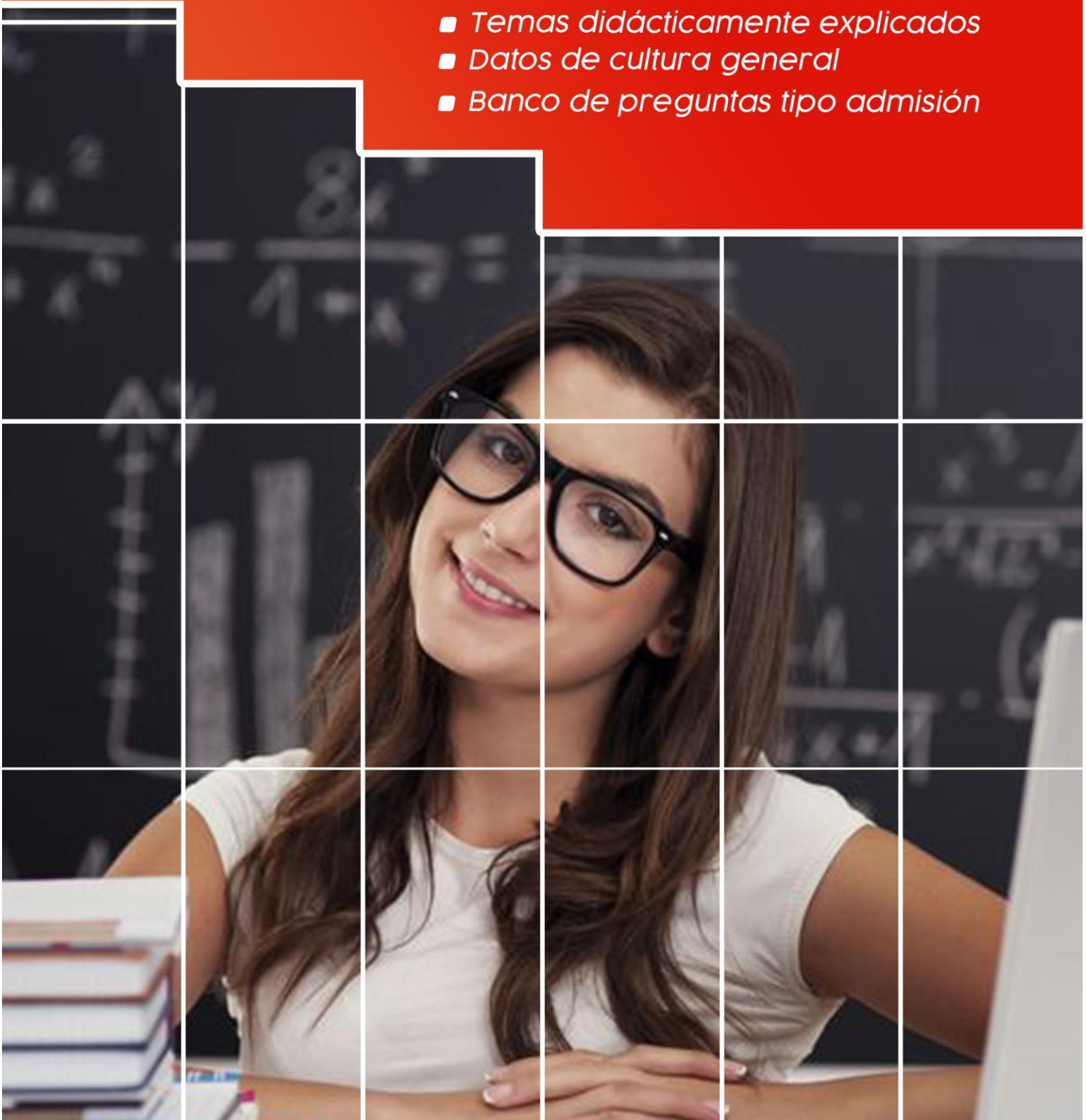


APTITUD MATEMÁTICA

- *Desarrollo sistemático del curso*
- *Temas didácticamente explicados*
- *Datos de cultura general*
- *Banco de preguntas tipo admisión*



CUATRO OPERACIONES

El objetivo principal de este capítulo es que el alumno utilice adecuadamente las cuatro operaciones fundamentales (+; -; x; ÷).

Las cuatro operaciones fundamentales, es el instrumento matemático mas antiguo utilizado por el hombre que nos permite resolver problemas de carácter comercial y de la vida diaria.

Ejemplo 1: Un comerciante compra cierta cantidad de agendas en S/.1424 y los vende todos en S/.2492, ganando así S/.1,50 por agenda. ¿Cuántas agendas compró y cuánto le costó cada una?

Resolución:

Precio de costo total: S/. 1424

Precio de venta total: S/. 2492

Entonces: Ganancia total = S/. 1068

Como ganancia en cada agenda es S/.1,50

Entonces: N° de agendas = $1068/1,50$
= 712

Ejemplo 2: Un sastre pensó confeccionar 100 camisas en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar 2,5 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó por día?

Resolución:

El sastre perdió 2,5 horas por día, durante 20 días; es decir: Perdió: $2,5 \times 20 = 50$ horas

Las que recupera en cinco días, a razón de: $\frac{50h}{5d} = 10h/d$

CALCULO DE DOS NÚMEROS, CONOCIENDO:

I) LA SUMA Y DIFERENCIA

Se emplea solamente para determinar dos cantidades, si conocemos la suma (**S**) y diferencia (**D**) de ambos, lo que implica que una de

las cantidades a calcular es mayor que la otra.

$$\text{N}^\circ \text{ mayor} = \frac{S + D}{2}$$

$$\text{N}^\circ \text{ menor} = \frac{S - D}{2}$$

II) SUMA Y COCIENTE

En el caso que tengamos como dato la suma de dos números (**S**) y el cociente de ambos (**q**), podemos calcular ambos números mediante la siguiente relación:

$$\text{N}^\circ \text{ menor} = \frac{S}{q + 1}$$

$$\text{N}^\circ \text{ mayor} = \frac{S \cdot q}{q + 1}$$

III) DIFERENCIA Y COCIENTE

En el caso que tengamos como dato la diferencia (**D**) y el cociente de ambos (**q**), podemos calcular ambos números mediante la siguiente relación:

$$\text{N}^\circ \text{ menor} = \frac{D}{q - 1}$$

$$\text{N}^\circ \text{ mayor} = \frac{D \cdot q}{q - 1}$$

Nota:

Es recomendable saber que el cociente es la relación del número mayor al número menor.

- * En un enunciado, al decir que:
 - Un número es el triple del otro significa que su cociente es 3 ($q = 3$).
 - Un número es la mitad del otro significa que su cociente es 2 ($q = 2$).
 - Un número es los $4/7$ de otro significa que: $q = \dots$

Ejemplo 3: En cierto día, las horas transcurridas exceden a las que faltan

transcurrir en 6 horas. ¿A qué hora ocurre esto?

Resolución:

Sean "tiempo transcurrido" (t.t) y "tiempo no transcurrido".

Sabemos que la suma y la diferencia de estos dos tiempos es:

$$S = 24h; \quad D = 6h$$

$$\Rightarrow \text{t.t. (mayor)} = \frac{24+6}{2} = 15 \text{ horas}$$

∴ Hora: **3 p.m.**

Ejemplo 4 : Dos personas tienen S/.900 y S/.300, respectivamente. Se ponen a jugar a las cartas a S/.10 cada partida y al final la primera que ha ganado todas las partidas, tiene el cuádruple de lo que tiene el segundo. ¿Cuántas partidas se jugaron?

Resolución

La suma total de dinero, entre juego y juego, no varía.

$$\Rightarrow S = S/.1200$$

Luego de "n" jugadas: q = 4

En ese momento el ganador tiene:

$$\frac{1200 \times 4}{4+1} = S/.960$$

habiendo ganado:

$$S/.960 - S/.900 = S/.60$$

a S/. 10 cada partida.

$$\Rightarrow \text{Nº de partidas} = n = \frac{S/.60}{S/.10} = 6$$

Ejemplo 5: En aquel entonces tu tenías 20 años más que yo, que tenía la quinta parte de la edad que tenías. Si eso sucedió en 1980, actualmente (2004) que edad tenemos, asumiendo que ya cumplimos años.

Resolución:

En 1980 la diferencia y el cociente de nuestras edades era:

$$D = 20 ; \quad q = 5$$

Teníamos:

$$\text{Tu (mayor)} = \frac{20 \times 5}{5-1} = 25$$

$$\text{Yo (menor)} = 25 - 20 = 5.$$

⇒ Actualmente tenemos:

49 y 29 años.

MÉTODOS OPERATIVOS

El propósito de este tema es mostrar los "métodos" usados con mayor frecuencia, que han demostrado su eficacia frente a otros procedimientos; aunque es necesario reconocer en que casos se deben aplicar.

METODO DE LAS DIFERENCIAS
(Método del rectángulo)

Es un método que se aplica a problemas donde participan dos cantidades excluyentes, una mayor que la otra, las que se comparan en dos oportunidades originando, generalmente, en un caso sobrante o ganancia y en el otro caso un faltante o pérdida.

Ejemplo 1: Un comerciante analiza: si compro a S/.15 el kilo de carne me faltaría S/.400; pero si sólo compro de S/.8 el kilo me sobraría S/.160. ¿Cuántos kilogramos necesita comprar y de que suma dispone?

Resolución:

Si compro a S/.15 c/Kg	-----	S/.400
	s	
S/. 8 c/Kg	-----	S/.160

$$D_u = S/. 7 \text{ c/Kg} \quad D_t = S/.560$$

$$\Rightarrow \text{Cantidad (Kg)} = \frac{D_t}{D_u} = \frac{S/.560}{S/.7} = \mathbf{80}$$

∴ Dinero disponible =

$$80\text{Kg} \times S/.8 + S/.160 = \mathbf{S/. 800}$$

Ejemplo 2: Para ganar \$28 en la rifa de una filmadora se hicieron 90 boletos, vendiéndose únicamente 75 boletos y originando así una pérdida de \$17. Calcular el costo de cada boleto y el valor de la filmadora.

Resolución:

	g				
Si vendiera 90 bol	-----				\$28
	p				
75 bol	-----				\$17
Δ = 15 bol					Δ = \$45

⇒ Costo c/boleto = $\frac{\$45}{15bol} = \3

∴ Valor de la filmadora = $90 \times 3 - 28 = \$242$

METODO DEL CANGREJO (Método Inverso)

Es un método utilizado en problemas donde interviene una variable a la cual se realiza una serie de operaciones directas hasta llegar a un resultado final. Se denomina "método inverso", porque a partir del dato final se realizan las operaciones inversas hasta llegar al valor inicial.

Ejemplo 3: Al preguntarle a "Pepito" por su edad, el contestó con evasivas diciendo lo siguiente: "si le agregas 10, al resultado lo multiplicas por 5 y enseguida le restas 26 para luego extraerle la raíz cuadrada y por último lo multiplicas por 3, obtendrás 24". ¿Cuál es la edad de "Pepito"?

Resolución:

Considerando la edad de Pepito: E; y aplicando las operaciones consecutivamente, como lo indicado por "Pepito", tenemos :

$E + 10 \times 5 - 26 \sqrt{\quad} \times 3 = 24$

Aplicando operaciones inversas, tenemos:

$E = 24 \div 3 \uparrow 2 + 26 \div 5 - 10$

E = 8 años.

Ejemplo 4: El nivel del agua de un tanque en cada hora desciende 2m por debajo de su mitad, hasta quedar vacío el tanque luego de 3 horas. Qué volumen de agua se ha utilizado, sabiendo que el tanque tiene una base circular de 5m².

Resolución:

Considerando el Nivel inicial del agua: H
Del problema deducimos que, en cada hora, queda la mitad menos dos metros de agua.

Entonces, en tres horas, queda:

$H \div 2 - 2 \div 2 - 2 \div 2 - 2 = 0$

Aplicando operaciones inversas, a partir del final, tenemos:

$H = 0 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$
 $H = 28 \text{ m.}$

Teniendo en cuenta que el volumen de un tanque circular es:

$V = \text{Area de la base} \times \text{altura}$

⇒ $V = 5 \text{ m}^2 \times 28 \text{ m}$
 $= 140 \text{ m}^3$

METODO DE FALSA SUPOSICION (Regla del Rombo)

Se aplica cuando en un problema participan un número de elementos divididos en dos grupos cuyos valores unitarios (o características) se conocen y además nos proporcionan el valor total, que es la resultante de sumar todos los valores unitarios.

Ejemplo 5: En el salón de clase el peso promedio de cada alumno es de 75 kg y de cada alumna 60 kg, si el peso total de todos es de 4020 kg. ¿En cuánto excede el número de mujeres al de los varones, si en total son 60?

Resolución: Aplicando el método de la **falsa suposición:**

Supongamos que los 60 alumnos pesan 75 Kg c/u.

⇒ Peso de todos los alumnos sería (Valor supuesto) = $60 \times 75 = 4500 \text{ Kg}$
Este valor excede al real en:
 $4500 - 4020 = 480 \text{ Kg}$

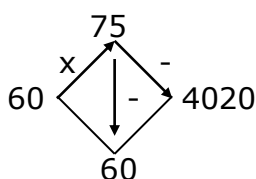
Este exceso es por que asumimos que todos eran varones, por lo que dimos un valor agregado a cada alumna de:
 $75 - 60 = 15 \text{ Kg.}$

⇒ N° de alumnas = $\frac{480}{15} = 32$

N° de alumnos = $60 - 32 = 28$

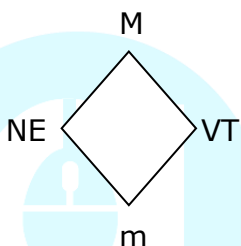
∴ $\Delta = 32 - 28 = 4$

* Las operaciones efectuadas en la solución de este problema se pueden resumir en:



$$\text{N}^\circ \text{ Alumnas} = \frac{60 \times 75 - 4020}{75 - 60} = 32$$

Esta es la regla práctica del método de la falsa suposición, llamada REGLA DEL ROMBO, que consiste en ubicar la información del problema en los cuatro vértices del rombo, de la siguiente manera:



donde:

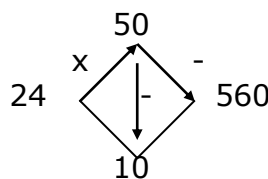
- NE : Número total de elementos.
- M : Mayor valor unitario.
- m : menor valor unitario.
- VT : Valor total.

Si se desea calcular el número de elementos que tienen el menor valor unitario, se procede de la siguiente manera:

$$\text{N}^\circ = \frac{NE \times M - VT}{M - m}$$

Ejemplo 6: En una billetera hay 24 billetes que hacen un total de 560 soles. Si solamente hay billetes de 50 y 10 soles, cuántas eran de cada clase?

Resolución:



$$\Rightarrow \text{N}^\circ \text{ billetes (S/.10)} = \frac{24 \times 50 - 560}{50 - 10} = 16$$

$$\text{N}^\circ \text{ billetes (S/.50)} = 24 - 16 = 8$$

REGLA CONJUNTA

Es un método que nos permite determinar la equivalencia de dos elementos.

Procedimiento:

1. Colocar la serie de equivalencias formando columnas.
2. Procurar que en cada columna no se repitan los elementos; si se repiten cambiar el sentido de la equivalencia.
3. Multiplicar los elementos de cada columna.
4. Despejar la incógnita.

Ejemplo 7: Si 4 soles equivale a una libra esterlina; 3 yenes equivale a 2 libras esterlinas; 5 marcos equivale a 6 yenes; y 9 marcos equivale a 6 pesetas.

¿Cuántas pesetas equivale a 16 soles?

Resolución:

S/. 4	<>	1 l.e.
2 l.e.	<>	3 yenes
6 yen.	<>	5 marcos
9 mar.	<>	6 pesetas
X pes.	<>	S/. 16

$$4.2.6.9.X = 1.3.5.6.16$$

$$X = 10/3$$

EJERCICIOS

1. Se ha pagado una deuda de S/. 170 con monedas de S/. 5 y S/.2. El número de monedas de S/. 2 es mayor que la de S/. 5 en 15. ¿Cuánto suman las monedas de S/. 5 y S/. 2?

Rpta

2. Un carnicero compró 152 kg de carne a S/. 15 el kg, después de haber vendido 32 kg a S/. 18 el kg. guarda la carne por varios días y se le malogra el 30%. ¿A como debe vender el kg de lo que le queda para ganar en total 144 soles?

Rpta

3. Compre varios radios portátiles por \$2800; vendí parte de ellos en \$900 a \$60 cada radio perdiendo \$20 en cada uno. ¿A como debo vender cada uno de los restantes para que pueda ganar \$ 500 en la venta total?

Rpta

4. Un tanque de agua de 540m³ de capacidad, puede ser desaguado mediante 3 bombas A, B y C colocadas equidistantemente de arriba hacia abajo; los caudales respectivos son de 3; 10 y 5m³/min. Si estando lleno el tanque se ponen en funcionamiento las bombas. ¿En que tiempo será desaguado totalmente?

Rpta

5. Para la elección de la Junta Directiva del mejor equipo del mundo "TODO SPORT" se presentaron tres listas A, B y C, 150 hombres no votaron por C; 170 mujeres no votaron por B; 90 hombres votaron por C; 180 votaron A y 50 hombres votaron por B. ¿Cuántos fueron los votantes y que lista ganó, si 200 votaron por B?

Rpta

6. Un ómnibus que hace su recorrido de Lima a Huaral, y en uno de sus viajes recaudó en total la suma de S/. 228. El precio único del pasaje es de S/. 6.00, cualquiera que sea el punto donde baje o suba el pasajero; cada vez que bajó un pasajero subieron 3 y el ómnibus llegó a Huaral con 27 pasajeros se desea saber el N° de pasajeros que llevaba el ómnibus al salir de Lima

Rpta

7. Hallar el mayor de dos números sabiendo que la suma es el máximo número de 3 cifras y su diferencia es el máximo número de 2 cifras.

Rpta

8. En una fiesta en la cual hay 42 personas, la primera dama baila con 7 caballeros; la segunda dama con 8; la tercera con nueve y así sucesivamente hasta que la última baila con todos los caballeros. ¿Cuántos caballeros asistieron?

Rpta:.....

9. Si le pago S/. 15 a cada uno de mis empleados, me faltarían S/. 400, pero si sólo le pago S/. 8 me sobrarían S/. 160. ¿Cuántos empleados tengo?

Rpta:.....

10. Un padre va al cine con sus hijos y al sacar entradas de S/. 3 observa que le falta para 3 de ellos, y entonces tiene que sacar entradas de S/. 1,50. Así entonces entran todos y aún le sobran S/. 3 ¿Cuántos eran los hijos?

Rpta:

11. Mientras iba al mercado a vender sus sandías un comerciante pensaba: si los vendo cada uno a S/. 18, me compraré mi terno y me sobrarán S/. 60; pero si los vendo a S/.20 cada uno, me sobrarían S/.90 luego de comprarme mi terno. ¿Qué precio tiene el terno?

Rpta:

12. Para ganar S/. 28 en la rifa de una radio se hicieron 90 boletos, vendiendo únicamente 75 y originando una pérdida de S/. 17. ¿Cuál es el valor de la radio?

Rpta:

13. A un número le sumamos 2; luego lo multiplicamos por 10 al resultado le sumamos 14 y obtenemos 54 como resultado final. De qué número se trata.

Rpta:

14. Se tiene un número de dos cifras al cuál se le multiplica por 4, luego se le suma 36, se le divide entre 2, nuevamente lo multiplicamos por 3 para al final restarle 33, obteniendo como resultado final el máximo número de 2 cifras. Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

Rpta:.....

15. Paquito ha pensado un número en la cuál le realiza las siguientes operaciones consecutivas; le agrega 2 a este resultado lo multiplica por 4 luego le merma 4, este resultado le extrae la raíz cuadrada, luego lo divide entre 2 y por último le quita uno; obteniendo como resultado final uno. ¿Cuál es el número?

Rpta:

16. Una niña escogió un número con el cual realizó las siguientes operaciones en el orden mencionado: lo elevo al cuadrado, restó tres a la potencia, dividió entre dos la diferencia, elevó al cubo el cociente, le agregó nueve a la potencia, le extrajo la raíz cuadrada a la suma y finalmente multiplico por 9 la raíz, obteniendo de esta forma 54. Calcular el duplo del número elegido.

Rpta.:

17. Dos amigos decidieron jugar una partida de cartas con la condición que el que pierda duplicará el dinero del otro. Si cada uno ha perdido una partida quedándole a cada uno S/.40. ¿Cuánto tenían inicialmente cada uno?

Rpta:

18. A, B, C deciden jugar teniendo en cuenta la siguiente regla que el perdedor deberá duplicar el dinero de los demás. Pierden en el orden indicado y al final quedaron como sigue A con S/. 16, B con S/. 24 y C con S/. 60. ¿Cuánto tenía A al principio?

Rpta:

19. Tres amigos están jugando con la condición que aquel que pierda deberá duplicar el dinero de los otros dos. Si cada uno ha perdido una partida quedándole luego de la tercera partida con S/. 60 c/u; dígame cuánto tenía inicialmente c/u.

Rpta:.....

FIGURAS

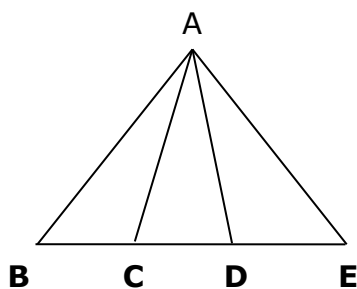
La facultad de observación y percepción de cambios en muchas situaciones visuales está unida con la lógica y la memoria. Es necesario por eso, plantearse este tipo de situaciones, tales como las que aparecen en esta lista preliminar:

- Comparar dos objetos para notar si son idénticos
- Encontrar un objeto oculto, basándose en un modelo.
- Enumerar y contar el conjunto de objetos observados
- Descubrir el trazo de un recorrido oculto.
- Elegir un recorrido óptimo entre varias rutas disponibles, etc.

Para algunos de estos problemas se dispone de ciertos métodos sistemáticos o algunas fórmulas pre establecidas, mientras que para otros sólo podemos contar con nuestra intuición e imaginación para obtener la solución. Haremos entonces un estudio por separado de los casos que se conocen.

I. CONTEO DE FIGURAS

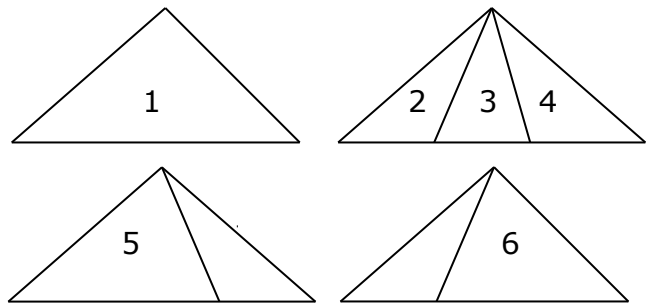
Ejemplo 1: ¿Cuántos triángulos se pueden observar en la figura?



Resolución:

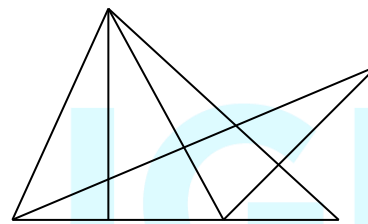
Podemos contar de dos formas:

1. Si utilizamos los vértices para identificarlos tendremos los siguientes triángulos: ABE, ABC, ACD, ADE, ABD y ACE = **6 triángulos**
2. Si sólo observamos y utilizamos nuestra memoria registramos estas imágenes:



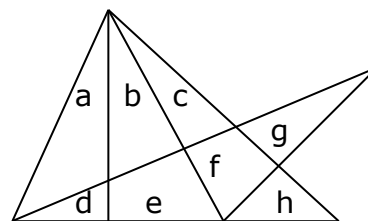
Los números indican los 6 triángulos reconocidos.

Ejemplo 2: ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



Resolución:

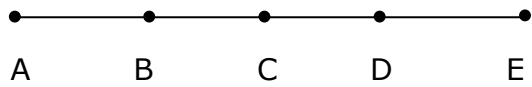
Asignándole letras a las figuras más pequeñas



Tenemos que la cantidad de triángulos buscados son:

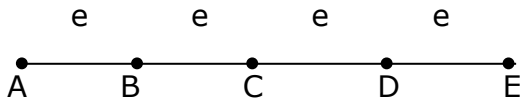
con 1 letra { a, b, c, d, g, h }	6
2 letras { ab; bc; ad; be; cf; de; fg }	7
3 letras { abc; cfh }	2
4 letras { abde; defg; defh }	3
5 letras { bcefh }	1
7 letras { abcdefh }	1
⇒ Total =	20

Ejemplo 3: ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?



Resolución :

Si asignamos a cada uno de los pequeños segmentos una letra (e), tenemos:



- Con 1 letra: 4 segmentos
- Con 2 letras: 3 segmentos
- Con 3 letras: 2 segmentos
- Con 4 letras: 1 segmento.

Total de segmentos:

$$S = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

ó

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Sumando miembro a miembro:

$$2 S = 5+5+5+5 = 20$$

Es decir que para 4 "e", tenemos:

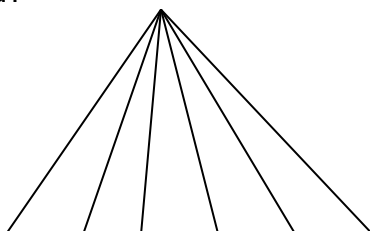
$$S = \frac{4(5)}{2} = 10$$

Generalizando, para "n" espacios, tenemos

$$\boxed{N^{\circ} \text{ Seg.} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Nota: Esta expresión matemática podemos aplicarla a otras figuras, siempre y cuando cada segmento genere la figura pedida.

Ejemplo 4: Cuántos triángulos hay en la figura?



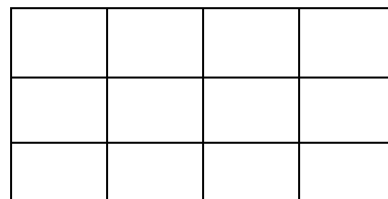
Resolución:

Observamos que cada uno de los segmentos, en la base del triángulo, genera a su vez una figura pedida.

Entonces, para n = 5

$$N^{\circ} \text{ triángulos} = \frac{5(6)}{2} = 15$$

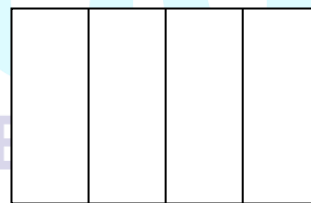
Ejemplo 5: Cuántos cuadriláteros hay en la figura?



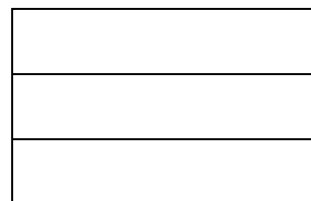
Resolución:

Calcularemos primero los cuadriláteros que habrían sin las líneas horizontales interiores y luego los cuadriláteros que habrían sin las líneas verticales interiores.

Es decir:



$$N^{\circ} \text{ de cuadriláteros} = \frac{4(5)}{2} = 10$$



$$N^{\circ} \text{ de cuadriláteros} = \frac{3(4)}{2} = 6$$

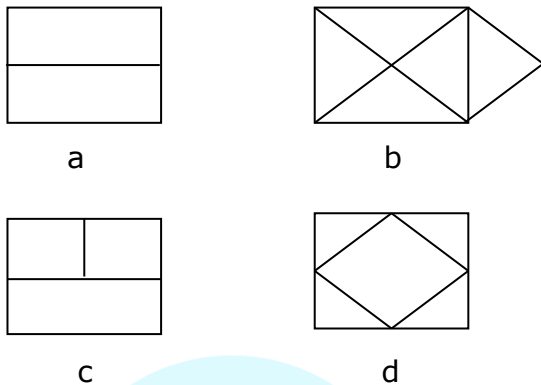
Luego, al superponerlos, se multiplican

$$\Rightarrow N^{\circ} \text{ cuadriláteros} = 10 \times 6 = 60$$

II. FIGURAS DE TRAZO CONTINUO

Es posible dibujar algunas figuras con trazo continuo, esto es, sin recorrer dos veces la misma línea y sin levantar el lápiz del papel. Con otros resulta imposible hacerlo.

Ejemplo 6: ¿Cuáles de las figuras siguientes se puede dibujar con un solo trazo?



Sólo las figuras a, b y d se pueden dibujar de un solo trazo. La figura "c" es imposible trazarla, a menos que se repita un segmento.

* Las razones se basan en una teoría que se conoce desde la época de **Leonard Euler** (1759) y de la cual extraemos algunos principios.

- Para que una figura se pueda dibujar de un solo trazo; es decir, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ninguna línea, es necesario estar en alguno de los siguientes casos:

Caso I: Todos los vértices de la figura dada deben ser pares; entendiéndose como vértice par aquel punto o nudo donde concurren un número par de líneas.

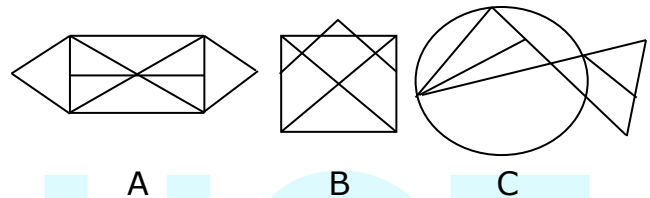
La trayectoria del trazo debe iniciarse en alguno de los vértices y concluir en el mismo.

Caso II: La figura debe tener sólo dos vértices impares.

La trayectoria del trazo debe iniciarse en uno de los vértices impares y concluir en el otro vértice impar.

- Cualquier otra situación diferente a los dos casos, no da lugar a realizar la figura de un solo trazo.
- Si deseamos dibujar de un solo trazo, una figura con mas de dos vértices impares, repetiremos como mínimo $\frac{i-2}{2}$ líneas; donde "i" es el número de vértices impares.

Ejemplo 7: ¿Cuáles de las siguientes figuras, se pueden graficar de un trazo, sin levantar el lápiz, ni pasar dos veces por la misma línea?



Ejemplo 8: Como mínimo una araña emplea 5 minutos en recorrer todas las aristas de un cubo construido de alambre de 60 cms. de longitud. ¿Cuál es el tiempo que emplea en recorrer una arista?

Resolución:

Para emplear el mínimo tiempo en recorrer una arista, la araña debe iniciar un recorrido en uno de los vértices. Debido a que los 8 vértices son impares no podrá hacer el recorrido sin repetir algunos de ellos.

⇒ el mínimo de aristas que repite en su recorrido será: $\frac{8-2}{2} = 3$
 ∴ recorrió: $12 + 3 = 15$ aristas

Resolviendo por regla de tres simple, tenemos:

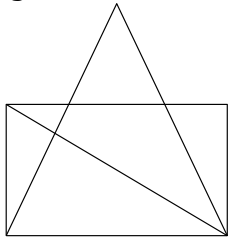
$$15 \text{ aristas} \longrightarrow 5 \text{ min} < > 300 \text{ seg.}$$

$$1 \text{ arista} \longrightarrow x$$

$$x = \frac{1 \times 300}{15} = \mathbf{20 \text{ seg.}}$$

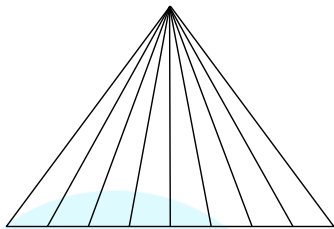
**PROBLEMAS PARA RESOLVER
EN CLASE**

1. Calcular el número de triángulos en la figura



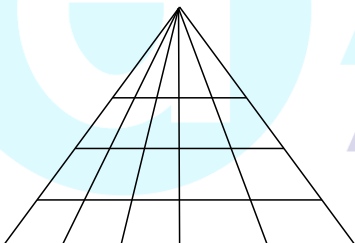
Rpta.

2.



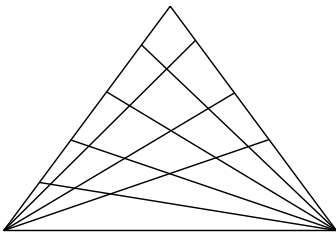
Rpta.

3.



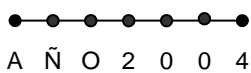
Rpta.

4.



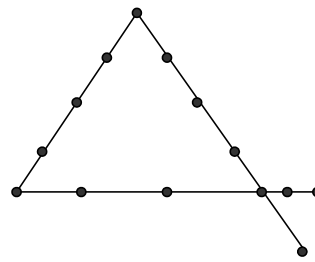
Rpta.

5. Calcule el número de segmentos



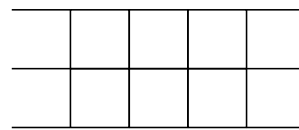
Rpta.

6.



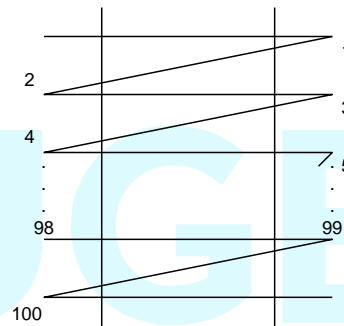
Rpta.

7.



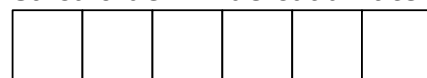
Rpta.

8.



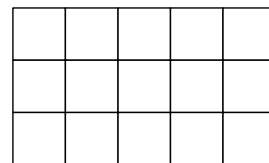
Rpta.

9. Calculo del N° de cuadriláteros



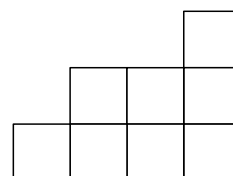
Rpta.

10.



Rpta.

11.



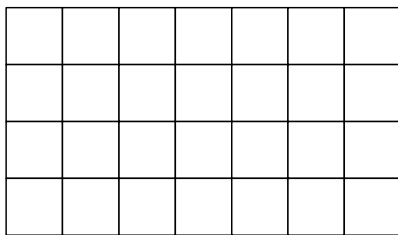
Rpta.

12. ¿Cuántos cuadrados se pueden contar como máximo en un tablero de ajedrez?

Rpta.

13. ¿Cuántos cuadrados se:

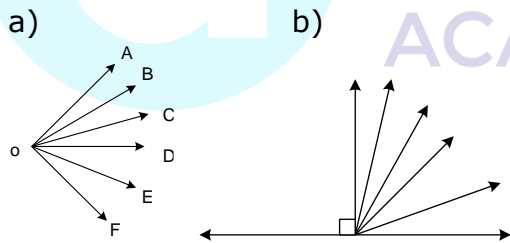
a) Observan en la siguiente figura



b) ¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados hay en la figura?

Rpta.

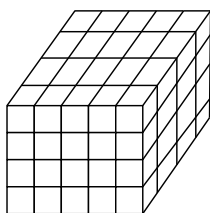
14. ¿Cuántos agudos se pueden contar en las siguientes figuras?



Dar como respuesta "a + b"

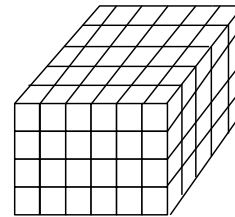
Rpta.

15. ¿Cuántos cubos como máximo hay en el siguiente sólido?



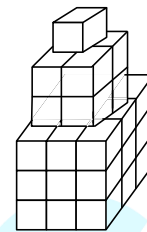
Rpta.

16. ¿Cuántos cubos se contarán como máximo en el siguiente sólido?



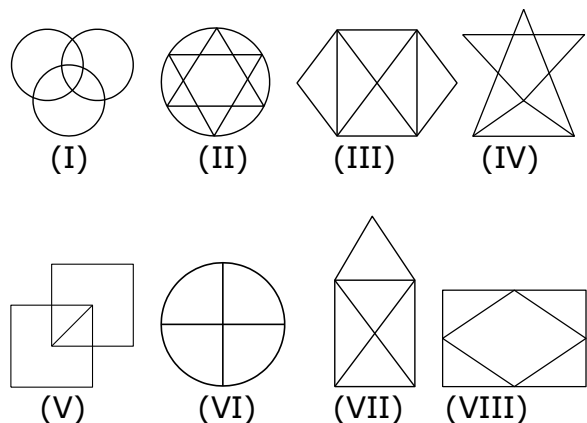
Rpta.

17. Para esta torre de 3 pisos se han utilizado 36 cubos. ¿Cuántos cubos serán necesarios para construir una torre similar de 20 pisos?



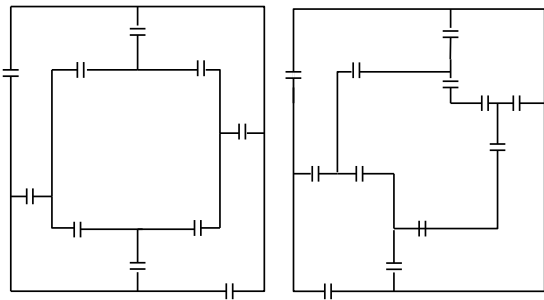
Rpta.

18. ¿Cuántas de las figuras siguientes se puede dibujar con un solo trazo continuo ni pasar dos veces por una misma línea?



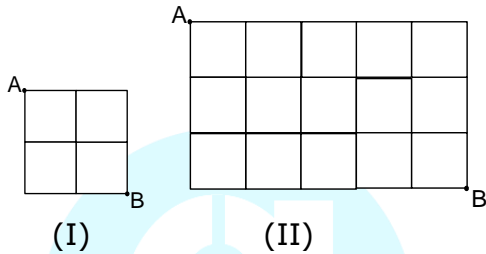
Rpta.

19. Aquí mostramos los planos de ciertos departamentos. ¿Cuál o cuales de ellos se prestan para pasar por todas las puertas de una sola vez empezando y terminando afuera?

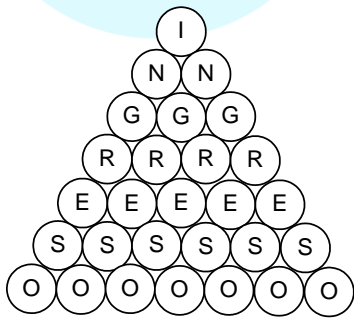


(1) (2)

20. ¿Cuántas rutas mínimas diferentes se tiene para llegar al punto "B" partiendo de "A"?

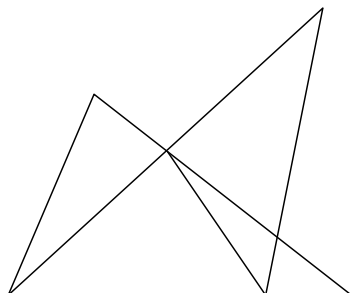


21. De cuántas maneras puedo leer "INGRESO" en la siguiente distribución



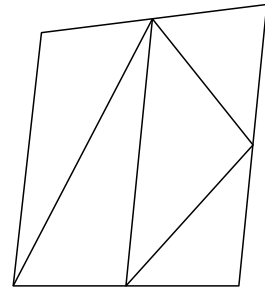
TAREA DOMICILIARIA

1. En la figura ¿Cuántos triángulos hay?
 a) 8
 b) 9
 c) 10
 d) 11
 e) 12



2. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura?

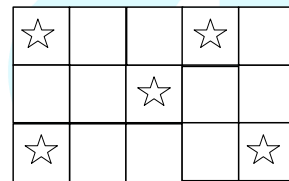
- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10



3. En nuestro tablero de ajedrez trazamos la diagonal principal, ¿Cuántos triángulos contaremos como máximo?

- a) 72
- b) 86
- c) 98
- d) 110
- e) 126

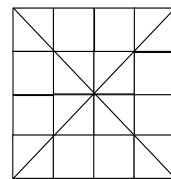
4. ¿Cuántos cuadriláteros que por lo menos tengan un asterisco hay en la siguiente figura?



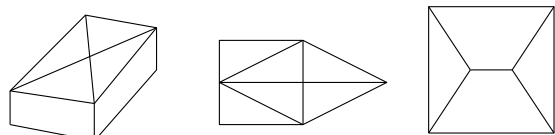
- a) 36
- b) 49
- c) 75
- d) 81
- e) 69

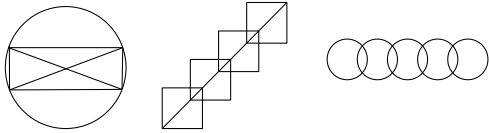
5. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

- a) 40
- b) 48
- c) 52
- d) 60
- e) 72

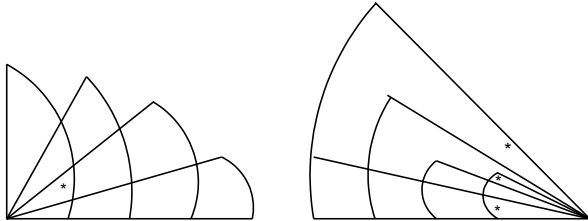


6. ¿Cuáles de las siguientes figuras se puede dibujar, sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por la misma línea? (Indicar Si o No)



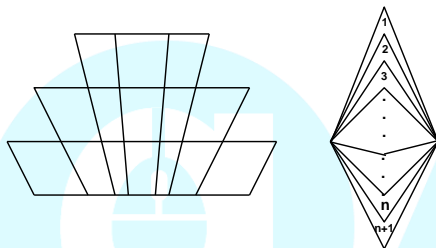


7. ¿Cuántos sectores circulares presentan en su interior un *?



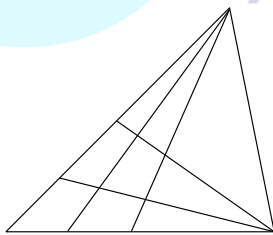
Rpta.

8. ¿Cuántos cuadriláteros hay como máximo en cada una de las siguientes figuras?



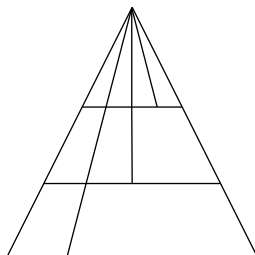
9. ¿Cuántos triángulos se contarán en la siguiente figura?

- a) 19
- b) 21
- c) 23
- d) 25
- e) 27



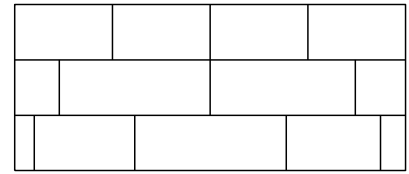
10. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?

- a) 15
- b) 17
- c) 19
- d) 21
- e) 23



11. ¿Cuántos cuadriláteros hay en esta figura?

- a) 35
- b) 37
- c) 39
- d) 41
- e) 42



12. De cuántas formas se podrá leer la palabra "UNAC"

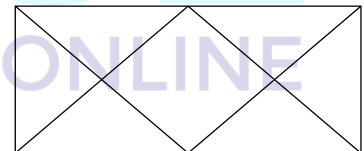
- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 20
- e) 24

U	N	A	C
N	A	C	U
A	C	U	N
C	U	N	A

Rpta.

13. ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadriláteros hay en la figura?

- a) 12; 10
- b) 10; 18
- c) 12; 12
- d) 8; 10
- e) 12; 8



14. Se tiene monedas de las mismas dimensiones. El número máximo de monedas tangentes dosadas que pueden colocarse tangencialmente alrededor de una de ellas es:

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

OPERADORES MATEMÁTICOS

CONCEPTO: Es un procedimiento matemático que sirve para transformar, sujeto a ciertas reglas, una o varias cantidades en otras; basándonos en el principio de valor numérico; es decir, cambiando letras por números.

OPERADOR: Es un símbolo arbitrario que sirve para representar a una determinada operación matemática y esta sujeto a una determinada regla de definición.

OPERACIÓN MATEMÁTICA: Consiste en la asociación de una pareja de números para obtener uno nuevo que es resultado de la operación. La adición, sustracción, multiplicación y división son ejemplos de operaciones matemáticas. Se pueden definir "nuevas operaciones" asignándoles un operador que las distinga de las que ya conocemos, empleándose por lo general un asterisco (*) o cualquier otro símbolo. No debemos olvidar que cada "nuevo" operador debe acompañarse de la regla o ley de formación que la define.

ESTRUCTURA:

↓ Operador

$$\underbrace{a * b}_{\text{Operación binaria}} = \underbrace{a + b + ab}_{\text{Ley de formación}}$$

Ejemplo 1: Si se define la operación $a \heartsuit b$ según la regla siguiente:

$$a \heartsuit b = a + b + 2ab$$

Hallar: $3 \heartsuit 5$

Resolución:

Para operar $3 \heartsuit 5$;
reemplazamos $a = 3$ y $b = 5$; en la regla de definición dada:
 $\Rightarrow 3 \heartsuit 5 = 3 + 5 + 2(3 \times 5)$
 $= 8 + 2(15) = 8 + 30 = \mathbf{38}$

NOTA:

Si se trata de operar $(1 \heartsuit 2) \heartsuit 4$, se procede por partes y desde los símbolos de colección; es decir, empezando por la pareja entre paréntesis.

OPERACIONES DEFINIDAS POR TABLAS:

En lugar de una ley de formación, para obtener el resultado, la operación binaria puede presentar estos resultados en una tabla.

Ejemplo 2: Para números enteros definimos las siguientes operaciones:

$$a * b = a^2 - b;$$

$$a \# b = 3^a - b^2; y$$

$$a \Delta b = 2a + 3b$$

$$\text{Si } x * x = 12;$$

$$y \# y = -10;$$

Hallar el valor de $x \Delta y$; para x e y positivos

Resolución:

Aplicando la operación $a * b$ en $x * x$, tenemos:

$$x^2 - x = 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x = 4}; x = -3$$

Aplicando la operación $a \# b$ en $y \# y$, tenemos:

$$3y - y^2 = -10$$

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

$$(y - 5)(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{y = 5}; y = -2$$

\therefore **como x e y deben ser positivos:**

$$\mathbf{x \Delta y = 4 \Delta 5 = 2(4) + 3(5) = 23}$$

Ejemplo 3: Dada la tabla

*	7	5	2
3	7	5	4
8	8	3	1
9	10	1	2

Hallar: $[(8 * 7) * 5] * 2$

Resolución:

Partimos de la operación binaria $a * b$ de modo que el primer elemento se ubica en la primera columna y el segundo elemento en la primera fila. Por lo que el resultado de $8 * 7$ se ubica en la intersección de estos números.

*	7		
	↓		
8	→ 8		

Es decir que: $8 * 7 = 8$
 \Rightarrow nos queda $(8 * 5) * 2$
 Procediendo de manera semejante, tenemos que $8 * 5 = 3$
 Finalmente: $3 * 2 = 4$

Ejemplo 4:

Se define la operación $a \nabla b$, según la tabla adjunta.

∇	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6
4	4	5	6	7

Hallar:
 $(4 \nabla 7) \nabla (6 \nabla 3)$

Resolución:

En la tabla no encontramos el resultado para $4 \nabla 7$; pero como los elementos distribuidos en el interior de la tabla son resultados de una ley de formación para una operación binaria, nuestra tarea será ahora hallarla.

De la tabla observamos que:

$$\begin{aligned} 1 \nabla 3 &= 3 && \text{que proviene de } 1 + 3 - 1 \\ 2 \nabla 4 &= 5 && 2 + 4 - 1 \\ 4 \nabla 3 &= 6 && 4 + 3 - 1 \end{aligned}$$

Generalizando:

$$a \nabla b = a + b - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4 \nabla 7 &= 4 + 7 - 1 = 10 \\ 6 \nabla 3 &= 6 + 3 - 1 = 8 \end{aligned}$$

Finalmente: $10 \nabla 8 = 10 + 8 - 1 = 17$

OPERACIONES COMO FUNCIONES:

Probablemente se recordará la típica frase "f de x"; de ciertas tareas escolares, que usualmente escribimos "f(x)"; esta notación es la función. No parece evidente pero cada operador es una función en la que empleamos x para indicar lo que ingresa como dato y f(x) para indicar lo que se obtiene (el resultado)

Así, la operación:

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

Se puede escribir:

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

Del mismo modo:

$$X \# Y = \frac{3X - 2Y}{5}$$

Se puede escribir:

$$f(x,y) = \frac{3X - 2Y}{5}$$

Ejemplo 5: Si definimos:

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

Hallar: $f(1) + f(0)$

Resolución:

Por comparación hacemos que:

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$$\text{Luego: } f(1) + f(0) = 3 + 1 = 4$$

Ejemplo 6: Si $F_{(2x+1)} = x - 1$

Hallar: $F_{(3x-2)}$

Resolución:

En este tipo de problemas seguiremos el siguiente procedimiento:

- Igualamos los dos argumentos
 $2x + 1 = 3x - 2$
- Despejamos el "x" que nos dan en función de la "x" que nos piden

$$2x = 3x - 3$$

$$x = \frac{3x - 3}{2}$$

- Finalmente, reemplazamos en la función que nos dan
Es decir:

$$F_{(3x-2)} = \frac{3x-3}{2} - 1 = \frac{3x-5}{2}$$

OPERACIONES COMPUESTAS

Consiste en combinar dos o mas operadores, con sus respectivas leyes de formación, incluyendo en una de ellas una operación desconocida; la cual hay que definirla empleando las operaciones dadas.

Ejemplo 7: Se define en los R:

$$\boxed{a} = a(a + 24)$$

$$\boxed{\triangle x} = 4x - 40$$

Calcular

$$\triangle 23$$

Resolución:

Al no tener definida la operación triángulo, debemos despejar de la segunda expresión, aplicando la primera; es decir:

$$\boxed{\triangle x} = \triangle x \left(\triangle x + 24 \right)$$

Pero por definición de la segunda operación, tenemos:

$$4x - 40 = \triangle x \left(\triangle x + 24 \right)$$

$$\triangle x^2 + 24 \triangle x = 4x - 40$$

$$\triangle x^2 + 24 \triangle x + 144 = 4x - 40 + 144$$

$$\left(\triangle x + 12 \right)^2 = 4x + 104$$

$$\triangle x + 12 = \sqrt{4x + 104}$$

$$\triangle x = 2\sqrt{x + 26} - 12$$

⇒ Aplicando la regla de formación de esta nueva operación:

$$\begin{aligned} \triangle 23 &= 2\sqrt{23+26} - 12 = 2 \times 7 - 12 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 8: Se define las operaciones

$$\boxed{n} = 2n - 5$$

$$\bigcirc n = 2 \boxed{n}$$

Hallar "x", en:

$$\boxed{x} = \bigcirc 6 - \bigcirc \boxed{3}$$

Resolución:

Reemplazando la primera operación en la segunda, tenemos:

$$\bigcirc n = 2 (2n - 5) = 4n - 10$$

Entonces, resolviendo por partes

$$\bigcirc 6 = 4 (6) - 10 = 14$$

Reemplazando en

$$\boxed{\bigcirc 6} = \boxed{14} = 2(14) - 5 = \mathbf{23} \quad a*b = b*a$$

Luego:

$$\boxed{3} = 2 (3) - 5 = 1$$

Reemplazando en:

$$\bigcirc \boxed{3} = \bigcirc 1 = 4 (1) - 10 = \mathbf{- 6}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x} = 23 - (- 6) = 29$$

Finalmente; aplicando $\boxed{\quad}$, tenemos

$$2x - 5 = 29 \quad \Rightarrow \mathbf{x = 17}$$

OPERACIONES BINARIAS

Consiste en la asociación de un par de elementos de un conjunto para obtener uno nuevo, que es resultado de la operación.

Pueden emplearse diferentes signos para indicar una operación binaria; las más usadas son: *, #.

* Cuando el resultado de la operación es un elemento del conjunto de partida se dice que el conjunto es cerrado (C) respecto a la operación definida; en caso contrario se dice que el conjunto es abierto (A) respecto a la operación.

Ejemplo: en el campo de IN

$$3 + 4 = 7 \in \text{IN} \rightarrow \text{C}$$

$$3 - 4 = -1 \notin \text{IN} \rightarrow \text{A}$$

$$3 \times 4 = 12 \in \text{IN} \rightarrow \text{C}$$

$$3 \div 4 = 0,75 \notin \text{IN} \rightarrow \text{A}$$

* Propiedades:

1. **Conmutativa:** $\forall a, b \in M$

$$a*b = b*a$$

2. **Asociativa:** $\forall a, b, c \in M$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

3. **Distributiva:** $\forall a, b, c \in M$

$$a*(b\#c) = (a*b) \# (a*c)$$

En este caso la operación * es distributiva respecto a la operación #

4. **Elemento neutro**

$$\forall a \in M \exists e/a* e = a$$

e: elemento neutro

• En el caso de la adición
 $e = 0 \Rightarrow a + 0 = a$

• En el caso de la Multiplicación
 $e = 1 \Rightarrow a \times 1 = a$

5. Elemento inverso

$$\forall a \in M \exists a^{-1}/a * a^{-1} = e$$

a^{-1} : Elemento inverso

En el caso de la adición.
 $a^{-1} = -a \Rightarrow a + (-a) = 0$

En el caso de la multiplicación
 $a^{-1} = \frac{1}{a} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Ejemplo 9: Se define la operación * mediante la sgte. tabla:

*	a	b	C	d
a	c	d	A	b
b	d	a	B	c
c	a	b	C	d
d	b	c	D	a

Hallar "x" en: $a^{-1} * b^{-1} = x * c$

Resolución:

1º Calculamos el elemento neutro

$$a * \square = a \Rightarrow \square = c$$

2º Marcamos en la tabla **c**

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

3º Hallamos los inversos respectivos

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a \\ b^{-1} &= d \\ c^{-1} &= c \\ d^{-1} &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^{-1} * b^{-1} &= x * c \\ a * d &= x * c \\ b &= x * c \\ \therefore \mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ejemplo 10: Si se define la operación mediante la tabla adjunta

*	5	6	7
5	5	6	7
6	6	7	5
7	7	5	6

Hallar: $(5^{-1} * 6^{-1}) * 7$

Resolución

1º Calculamos el elemento neutro
 $5 * \square = 5 \Rightarrow \square = 5$

2º De la tabla obtenemos los inversos de 5 y 6

$$\begin{aligned} 5^{-1} &= 5 \\ 6^{-1} &= 7 \\ \Rightarrow (5^{-1} * 6^{-1}) * 7 &= (5 * 7) * 7 \\ &= 7 * 7 = \mathbf{6} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

- Si: $p \# q = 2q - 5p$
 Hallar:
 $E = (3\#7) \# (2\#6)$
 Rpta:
- Si $(x + 1) * 2y = x(y + 1)$
 Hallar: $3 * 6$
 Rpta:
- Si: $m * n = 2m + 3n - 1$
 Hallar "x", en:
 $(x - 1) * (2x + 2) = 15$
 Rpta:
- Si:
 $a \ \& \ b = \frac{a-b}{3} ; a > b$
 $a \ \& \ b = \frac{b-a}{4} ; a < b$
 Hallar:
 $E = (17 \ \& \ 8) \ \& \ (11 \ \& \ 31)$
 Rpta:

5. Si: $f(x) = x^3 - 1$
 $g(x) = 2x + 1$
 Hallar:
 $E = f(g(f(g(-1))))$
 Rpta:

6. Si:

#	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

Hallar $(a \# c) \# a + (b \# d) \# c$
 $[(a \# b) \# (c \# d)] \# d$
 Rpta:

7. Si: $m \# n = \frac{m^2n - 3mn}{14n}$
 Hallar:
 $E = 7 \# \{ 7 \# [7 \# (\dots)] \}$
 Rpta:

8. Si: $\boxed{a} = 2 \textcircled{a}$;
 Además
 $\textcircled{a} = (a^2 + 5a) / 3$; y
 $a * b = a.b^{-1}$
 Hallar:
 $\boxed{\boxed{1}} * \boxed{3}$
 Rpta:

9. Si: $f(n) = n f(n-1)$;
 Además $f(6) = 7200$
 Calcular: $f(2) - f(1)$
 Rpta:

10. Si:
 $\sqrt{a} * b^2 = 2 (\sqrt{b} * a^2) - ab$
 Calcular:
 $E = \frac{\sqrt{3} * 2}{\sqrt{6}}$
 Rpta:

11. Si: $\boxed{a * b} = 4a$
 $\boxed{a} = (a-1)^2 + 4$
 Calcular: $10 * 87$
 Rpta:

12. Si: $\diamond n = \frac{n(n+1)}{2}$
 Calcular "X", en:
 $\diamond \diamond \diamond A = 21$
 $A = 2X + 1$
 Rpta:

13. Si: $P(x) = x^2 + xy + xz + yz$
 Calcular:
 $\sqrt{P(y).P(z).P(o)}$
 Rpta:

14. Hallar: $f(f(5))$
 Sabiendo que:
 $P[f(x+1)] = x-1$, y
 $P(x-2) = x-3$
 Rpta:

15. Si: $\bigcirc_x = x^2 - 9$

$\square_x = x(x+6)$

Calcular:

$E = \bigcirc_2 + \square_2 - \square_2$

16. Sea la tabla:

♥	3	4	5
3	A	5	7
4	5	V	11
5	7	11	R

Calcular: $A + V + R$

Rpta:

17. Se define: $\sqrt{a} * b^3 = a - b^2$

Calcular: $(4 * 27) * (6\sqrt{2} * 512)$

Rpta:

18. Sabiendo que:

$\bigcirc_{x-1} = 3x + 2$

$\square_{x+1} = 9x - 10$

Hallar la expresión equivalente a

$\square_{\bigcirc_{x+2}} - 8$

Rpta:

19. Si se define la operación mediante la tabla adjunta

*	3	4	5	6
3	6	3	4	5
4	3	4	5	6
5	4	5	6	3
6	5	6	3	4

Hallar x en:

$(x^{-1} * 3)^{-1} * (6^{-1} * 4^{-1})^{-1} = 5^{-1}$

Rpta:

SITUACIONES LÓGICAS

En este capítulo vamos a plantear situaciones en los que solo necesitaremos una pequeña dosis de concentración para dar con la respuesta debida; sin necesidad de recurrir a la teoría matemática, sino al sentido común.

Veremos problemas sobre:

- Test de decisiones.
- Cortes y Estacas.
- Parentesco (Relaciones familiares)
- Máximos y Mínimos. Certezas
- Orden de Información
- Razonamiento lógico.
- Razonamiento Inductivo-Deductivo.

TEST DE DECISIONES:

Está formado por problemas con un aparente caos en su redacción, donde existen muchos datos en desorden, los que pueden ser ordenados por lo general en cuadros.

Ejemplo 1: En un club se encuentran cuatro deportistas cuyos nombres son: Juan, Mario, Luis y Jorge. Los deportes que practican son: natación, básquet, fútbol y tenis. Cada uno juega sólo un deporte.

- El nadador, que es primo de Juan, es cuñado de Mario y además es el más joven del grupo.
- Luis que es el de más edad, es vecino del básquetbolista, quien a su vez es un mujeriego empedernido.
- Juan que es sumamente tímido con las mujeres y es 7 años menor que el tenista. ¿Quién practica básquet?

Resolución:

Analicemos con cuidado:

- Si el nadador es primo de Juan, entonces Juan no es nadador.
- Como el nadador es cuñado de Mario, entonces Mario no es nadador.

- Como el nadador es el más joven, Luis no puede ser nadador (ya que es el de más edad).
- Luis no juega básquet, ya que es vecino del basquetbolista.
- Juan es menor que el tenista, luego Juan no es el tenista.
- Juan no juega básquet, ya que el basquetbolista es mujeriego y Juan es tímido.

Colocando en un cuadro todo lo analizado, tendremos:

	Natación	Básquet	Fútbol	Tenis
Juan	NO	NO		NO
Mario	NO			
Luis	NO	NO		
Jorge				

Como cada personaje practica sólo un deporte, en cada columna debe haber un SI y en cada fila también; Esto hace que si una fila y columna tienen en este caso tres veces NO, el cuarto casillero se completa con SI.

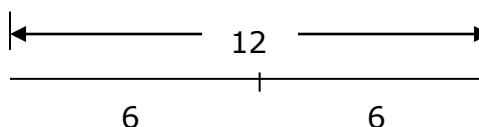
Entonces el cuadro completo será:

	Natación	Básquet	Fútbol	Tenis
Juan	NO	NO	<u>SI</u>	NO
Mario	NO	<u>SI</u>	NO	NO
Luis	NO	NO	NO	<u>SI</u>
Jorge	<u>SI</u>	NO	NO	NO

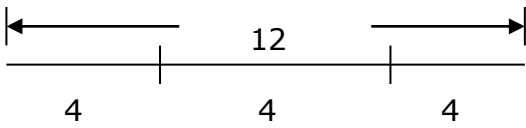
Por lo tanto, el que practica básquet es **Mario**.

CORTES Y ESTACAS:

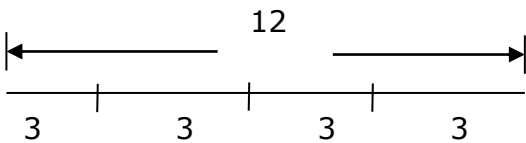
Si tuviéramos una varilla de 12 cm, necesitamos hacer un corte para lograr dos piezas iguales, o dos cortes para lograr tres piezas iguales o tres cortes para lograr cuatro piezas iguales. Representamos esto gráficamente:



$$\text{Nº de Cortes} = 1 = \frac{12}{6} - 1$$



$$\text{Nº de Cortes} = 2 = \frac{12}{4} - 1$$



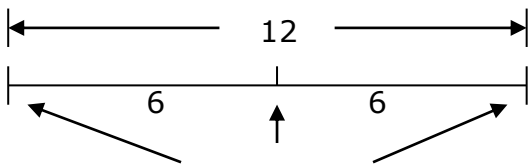
$$\text{Nº de Cortes} = 3 = \frac{12}{3} - 1$$

En el último ejemplo, 12 es la Longitud Total (Lt) de la varilla y 3 es la Longitud de cada pieza o Longitud Unitaria (Lu), de modo que en general:

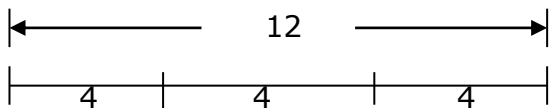
* El Nº de CORTES que podemos hacer en una varilla estará dado por la siguiente relación:

$$\text{Nº CORTES} = \frac{Lt}{Lu} - 1$$

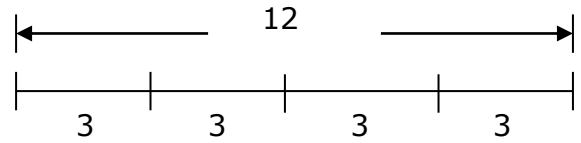
* Para considerar el hecho de colocar postes o estacas, cada cierta distancia; como en el caso de cortes, lo consideramos gráficamente:



$$\text{Nº ESTACAS} = 3 \text{ ó } \text{Nº ESTACAS} = \frac{12}{6} + 1$$

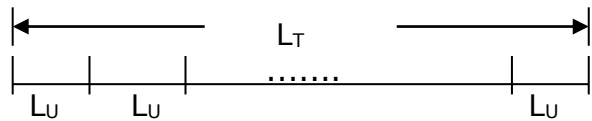


$$\text{Nº Estacas} = 4 = \frac{12}{4} + 1$$



$$\text{Nº Estacas} = 5 = \frac{12}{3} + 1$$

En general :



$$\text{Nº ESTACAS} = \frac{Lt}{Lu} + 1$$

Ejemplo 2: Un joyero cobra S/.5 por dividir una barra de hierro en dos partes. Cuánto se tendrá que pagar si debe partirla en 7 pedazos?

Resolución:

Con 1 corte obtenemos 2 pedazos
 2 cortes 3 pedazos
 3 cortes 4 pedazos
 :
 :
 ⇒ 6 cortes 7 pedazos
 ∴ Pago = 6 x 5 = **S/.30**

PROBLEMAS SOBRE PARENTESCO

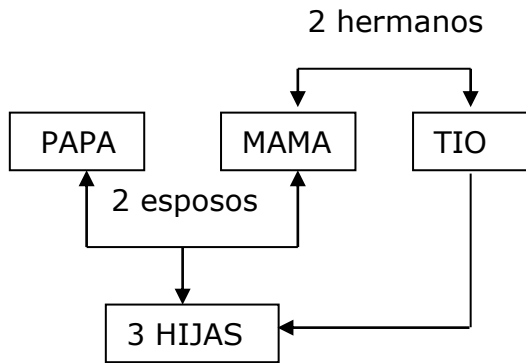
Algunos problemas lógicos - deductivos interrogan sobre el número de integrantes de una familia, sobre un tipo específico de relación familiar, etc. La resolución, en algunos casos, consiste en tener presente que cada uno de nosotros, dentro de nuestra familia, desempeña diferentes roles; así, se puede ser al mismo tiempo padre, hijo, hermano, esposo, etc.

Ejemplo 3: En una familia se notan 2 esposos, 2 hermanos, 3 sobrinas y 3

hermanas. Al menos, cuántas personas conforman esta familia?

Resolución:

“Por lo menos”, “Al menos” sirven para expresar la mínima cantidad.



3 hermanas
3 sobrinas

⇒ Mínimo nº de personas = **6**

PROBLEMAS SOBRE MAXIMOS Y MINIMOS

Ejemplo 4: Una urna tiene 15 bolas negras, 12 rojas y 9 amarillas. Cuál es la mínima cantidad que debo sacar para tener al menos una de cada color?

Resolución:

Supongamos que la primera bola que se extrae es negra (son las que mas hay); luego necesito sacar una roja y finalmente una amarilla para tener una de cada color; pero la próxima puede seguir siendo negra y así sucesivamente.

Por lo tanto, las primeras bolas que se extraen son las 15 de color negro; las siguientes serán las 12 de color rojo y finalmente se sacará una de color amarillo.

⇒ Bolas extraídas = 15 + 12 + 1 = **28**

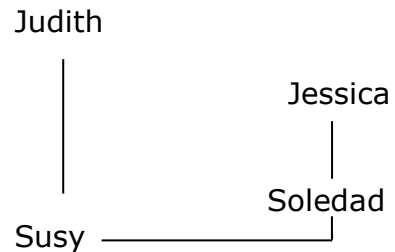
ORDEN DE INFORMACIÓN

Los principales casos son:

a) **Ordenamiento vertical:** se aplica para el ordenamiento de alturas, tamaños, edades, puntajes obtenidos por personas, entre otros.

Ejemplo 5: Judith es mayor que Susy. Soledad es menor que Jessica. Susy es menor que Soledad. Quién es la menor?

Resolución:



⇒ La menor es **Susy**.

b) **Ordenamiento horizontal:** se aplica para ordenamiento de personas en una hilera o sentados en butacas o uno al lado de otro; para autos en hilera, entre otros.

Ejemplo 6: Seis amigos: A, B, C, D, E, F; se sientan en seis asientos contiguos en el cine. A se sienta junto y a la izquierda de B; C está a la derecha de A, entre F y D; D está junto y a la izquierda de E; F está a la izquierda de E. Quién ocupa el cuarto asiento, si los contamos de izquierda a derecha?

Resolución:

Ubicando de acuerdo a la información, tenemos:

Izquierda			Derecha		
A	B	F	C	D	E

⇒ el 4º asiento es ocupado por **C**

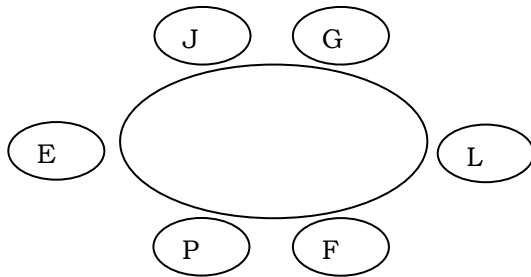
c) **Ordenamiento circular:** se aplica cuando un conjunto de seres se ordenan alrededor de una mesa circular o elíptica, o juegan a la ronda.

Ejemplo 7: Seis amigos están sentados alrededor de una mesa elíptica. Si se sabe que Luis no está sentado al lado de Enrique ni de José. Fernando no está al lado de Gustavo ni de José. Enrique no está al lado de Gustavo ni de Fernando. Pedro está

sentado junto a Enrique, a su derecha. Quién está sentado a la izquierda de Enrique.

Resolución:

Ubicando de acuerdo a la información tenemos:



⇒ **JOSÉ** es el que está sentado a la izquierda de Enrique.

RAZONAMIENTO LÓGICO:

A continuación abordaremos problemas que no requieren de alguna teoría matemática compleja, sólo nuestro sentido lógico.

Ejemplo 8: Mañana será el ayer del antes de ayer del mañana del sábado. Que día fue ayer?

Resolución:

Empezamos por el final; es decir:
 Mañana del sábado : Domingo.
 Antes de ayer del domingo: Viernes
 Ayer del viernes : Jueves.

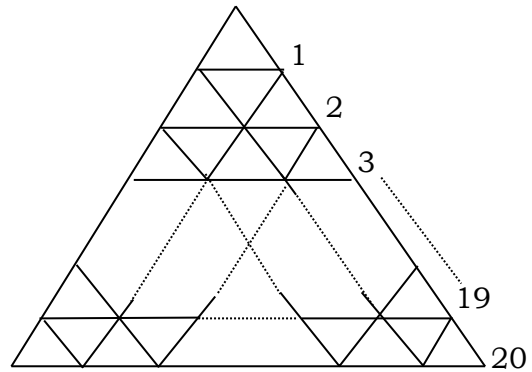
⇒ Mañana será jueves
 Hoy es Miércoles.

∴ Ayer fue **MARTES**.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Es aquel tipo de razonamiento que partiendo de casos particulares llega a una conclusión en general:

Ejemplo 9: ¿Cuántos triángulos simples, en total, hay en la figura?



Resolución:

Si asignamos letras a las figuras pequeñas, ellas sólo serían los triángulos simples.

⇒ Contando, en forma acumulada, por filas, tendremos:

Hasta la fila:	Total de triángulos:
1	1 = 1 ²
2	4 = 2 ²
3	9 = 3 ²
4	16 = 4 ²
:	:
20	→ 20 ²

∴ Tendremos en total **400** triángulos simples.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Es aquel tipo de razonamiento que partiendo de una conclusión general se llega a verificar una premisa particular.

Ejm 10: Los hijos de la señora Carmela son inteligentes. Laura, es hija de la señora Carmela.

⇒ **Laura es inteligente.**

EJERCICIOS

1. Tres hombres se encuentran en la calle: el señor Prado, el señor Iglesias y el señor Mercado.

El señor Prado dice:

- "Uno de nosotros vive al costado de un prado, otro al costado de una iglesia, y otro al costado de un mercado, pero ninguno vive al costado del sitio que lleva su nombre"
- "Pues es verdad", dice el hombre que vive al costado de un mercado

¿Podrías decir al costado de qué vive el señor Iglesias?

Rpta:.....

2. Raúl, Carlos, Pedro y Miguel tienen diferentes ocupaciones:

- Raúl y el profesor están enojados con Miguel.
- Carlos es amigo del ingeniero
- El médico es muy amigo de Pedro y del Ingeniero.
- Raúl desde muy joven se dedicó a vender abarrotes

¿Cuál es la ocupación de Pedro?

Rpta:.....

3. Manuel es 4 años menor que Alberto, Raúl es un año mayor que Pedro, Raúl es 2 años menor que Juan y Alberto es 7 años mayor que Juan. Al restar la edad de Alberto y la edad de Pedro, obtenemos:

Rpta:.....

4. Se sabe que las profesiones de Adela, Carmen, Katty y Sonia son arqueóloga, abogada, odontóloga y profesora, aunque no necesariamente en ese orden.

Adela está casada con el hermano de la abogada. Carmen y la profesora van a trabajar en la movilidad de la abogada. Las solteras de Katty y la arqueóloga

son hijas únicas. Carmen y Sonia son amigas de la odontóloga, la cual está de novia. ¿Quién es la abogada?

Rpta:.....

5. En una reunión del directorio de una empresa se encuentran: el presidente, el vicepresidente, el secretario y un trabajador de la empresa, cuyos nombres (no necesariamente en ese orden) son: Emilio, Ricardo, Samuel e Inocencio. Se sabe:

- Samuel y el trabajador son muy amigos.
 - Ricardo es primo del secretario
 - Emilio y el vicepresidente no se llevan bien
 - El presidente y el trabajador son amigos de Inocencio.
 - El secretario se llama Emilio
- ¿Quién es el presidente y quién es el trabajador?

Rpta:.....

6. Cuatro amigos viven en un edificio de cuatro pisos. Arturo vive en el primer piso, Mario vive más abajo que Jorge y Willy vive un piso más arriba que Mario. ¿En que piso vive Jorge?

Rpta:.....

7. En cierto campeonato de fútbol (a una sola rueda) la siguiente tabla muestra las respectivas posiciones de cada equipo.

Equipos	PJ	PG	PE	PP	Puntos
AA	6	6	0	0	18
BB	6	5	0	1	15
CC	6	2	1	3	7
DD	6	2	0	4	6
EE	5	1	2	2	5
FF	5	1	1	3	4
GG	6	0	2	4	2

Al único que derrotó "EE" fue:

Rpta:.....

8. Armando, Benito, Carlos y Daniel practican los siguientes deportes: natación, atletismo, fútbol y tenis, y viven en los distritos de Los Olivos, Breña, San Borja y Miraflores. Se sabe:

- Carlos no vive en los Olivos ni en Breña.
- El atleta vive en los Olivos
- Armando vive en Miraflores
- Daniel es futbolista
- El nadador nunca ha emigrado de San Borja

¿Qué deporte practica Armando?

Rpta:.....

9. A una fiesta fueron invitadas tres parejas de esposos y de ellos se tiene la siguiente información:

- Hay dos colombianos, dos bolivianos y dos panameños (varón o mujer)
- Alberto es colombiano y la esposa de Miguel es panameña.
- No hay dos hombres de la misma nacionalidad.
- No hay una pareja de esposos de la misma nación.

¿Qué nacionalidad tiene Miguel y que nacionalidad tiene la esposa de Roberto?

Rpta:.....

10. Tres parejas de esposos asisten al matrimonio de un amigo. Ellos son Jorge; Alberto y Oswaldo y ellas son: Rosa, Maribel y Lourdes. Una de ellas fue con un vestido negro, otra de azul y la otra de rojo. La esposa de Jorge fue de negro; Oswaldo no bailó con Maribel en ningún momento. Rosa y la del vestido azul fueron al matrimonio de Lourdes. Alberto es primo de Lourdes. Jorge y el esposo de Lourdes siempre se reúnen con el hermano de Alberto. Entonces es cierto que:

Rpta:.....

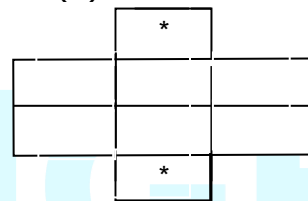
11. Tres estudiantes de Historia, Economía e Ingeniería viven en Chiclayo, Lima y Arequipa.

- El primero no vive en Lima, ni estudia Ingeniería.
- El segundo no vive en Chiclayo y estudia Economía
- El Historiador vive en Arequipa.

¿Qué estudia el tercero y dónde vive?

Rpta.

12. Colocar en las casillas los dígitos del 1 al 8, de modo que 2 números consecutivos no sean contiguos, ni por un lado ni por el vértice. Cuál es la suma de las casillas con asterisco (*)?



Rpta.

13. Se tiene 9 bolas de billar, de un mismo tamaño y de un mismo peso, a excepción de una bola que pesa más. Empleando una balanza de dos platillos sin pesas, cuántas pesadas deben hacerse como mínimo para encontrar esa bola?

Rpta.

14. Expedición : Planeta L
 Biólogo : Profesor K
 Informe : "El tercer día vimos seres extraños, aunque tienen veinte dedos en total, como nosotros, tienen una extremidad menos y un dedo más en cada extremidad, lo que les da, por cierto, un aspecto espantoso" ¿Cuántas extremidades tienen los seres del planeta L?

Rpta.

15. Seis hombres y dos muchachas tienen que cruzar un río en una canoa, en cada viaje puede ir uno de los hombres o las dos muchachas, pero no un hombre y una muchacha a la vez. ¿Cuál es el número de veces que la canoa tiene que cruzar el río, en cualquier sentido, para pasen a todos?

Rpta.

16. Milagros al acordarse de una persona se puso a pensar de la siguiente manera: "Yo lo conocí un viernes, a los tres viernes siguientes discutí con él y lo deje de ver, lo extraño mucho porque son cinco viernes que no lo veo ¿Qué fecha lo conoció si hoy es Domingo 13 de Mayo?"

Rpta.

17. Seis personas juegan al póker alrededor de una mesa circular. Luis no está sentado al lado de Enrique ni de José; Fernando no está al lado de Gustavo ni de José; Enrique no está al lado de Gustavo ni de Fernando. Si Pedro está junto a Enrique, ¿quién está al frente de Luis?

Rpta.

18. En un aro de 10m de longitud se desea realizar cortes cada metro de longitud ¿Cuántos cortes se efectuarán?

Rpta.

19. Para encerrar un terreno rectangular se sabe que se pueden colocar 8 y 12 columnas por lado y a cada 4m, colocando una columna en cada vértice ¿Cuál es el perímetro del terreno?

Rpta.

20. Sobre una mesa hay 3 naipes en hilera.

Si sabemos que:

- A la izquierda del rey hay un As
 - A la derecha de una jota hay un diamante.
 - A la izquierda del diamante hay un trébol
 - A la derecha del corazón hay una jota.
- ¿Cuál es el naipe del medio?

Rpta.

PLANTEO DE ECUACIONES

PLANTEO DE ECUACIONES

Para resolver un problema relativo a números o cantidades desconocidas se debe expresar una información escrita en idioma normal, en el simplificado idioma de las proposiciones matemáticas, las cuales nos permiten operar con más comodidad y rapidez que otros procedimientos. Esto implica realizar una especie de traducción de situaciones de la vida real, al simbolismo matemático, tarea que constituye el argumento más útil en todo el proceso de solución.

A continuación presentamos un listado de frases típicas que suelen aparecer en los problemas, y a un costado su respectiva traducción matemática:

El resultado de sumar un número a 7 $\rightarrow 7 + X$

La suma de algún número y 13 $\rightarrow \square + 13$

El resultado de restar a 18 algún número $\rightarrow 18 - Z$

Dos veces la suma de un número y 5 $\rightarrow 2(\Delta + 5)$

Nótese que cada vez que nos hemos referido a un número o algún número, en la traducción matemática, ésta se ha representado por una letra (X,Y,Z) o un símbolo: \square ; Δ

Ahora, cuando tengas que traducir una frase a una ecuación, debes determinar el significado de cada parte y asimismo tendrás que reconocer qué es lo que vas a reemplazar por una variable.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} \underbrace{\text{Un número}}_n, \underbrace{\text{aumentado en 5}}_{+5} \text{ da como suma } \underbrace{23} \\ n + 5 = 23 \\ \underbrace{\text{S/.6 menos que}}_{-6} \underbrace{\text{el costo de un sombrero es}}_x \text{ S/.17} \\ \Rightarrow x - 6 = 17 \end{array}$$

Procedimiento para resolver problemas

La experiencia nos permite proponer que lo esencial para resolver un problema planteando ecuaciones, consiste en la habilidad para seguir cada uno de los siguientes pasos:

- 1) Representación de las cantidades desconocidas o incógnitas por variables (x, y, z, ... etc.).
- 2) Planteo de las ecuaciones que relacionan a las incógnitas con los datos del problema.
- 3) Solución de las ecuaciones planteadas; esto es, determinar los valores de las variables.
- 4) Prueba o verificación de los valores obtenidos para ver si cumplen las condiciones del problema.

No está demás afirmar que las etapas de representación y planteo, requieren la mayor concentración posible, pues al realizarlas correctamente se asegura una solución del problema. Es por eso que a estas etapas les daremos mayor énfasis en los ejemplos que presentaremos a continuación.

Ejemplo 1

El cuadrado de un número, disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2.

Hallar el número.

Resolución:

Sea "N" el número buscado e interpretando la información, tenemos:

$$N^2 - 9 = 8(N-2)$$

$$N^2 - 9 = 8N - 16$$

$$N^2 - 8N + 7 = 0$$

$$(N-7)(N-1) = 0$$

$$N - 7 = 0 \quad \text{ó} \quad N - 1 = 0$$

$$N = 7 \quad \quad \quad N = 1$$

Ejemplo 2

El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Hallar el número.

Resolución

Sea "N" el número.

Del primer párrafo obtenemos:

$$8N - 60$$

Del segundo párrafo obtenemos:

$$60 - 7N$$

Las cuales son equivalentes

$$\therefore 8N - 60 = 60 - 7N$$

$$15N = 120$$

$$N = 8$$

Ejemplo 3

Compré el cuádruple del número de caballos que vacas, si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más, el número de caballos sería 2 veces mayor que el número de vacas. ¿Cuántos caballos compré?

Resolución

Del primer párrafo encontramos:

Caballos: $4x$

Vacas : x

Del segundo párrafo obtenemos:

Caballos: $4x + 5$

Vacas: $x + 5$

Caballos sería 2 veces mayor que vacas

$$4x + 5 = 3(x + 5)$$

$$4x + 5 = 3x + 15$$

$$x = 10$$

⇒ caballos comprados son:

$$4(10) = \mathbf{40}$$

Ejemplo 4

En cada día, de lunes a jueves, gané \$6 más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuádruple de lo que gané el lunes, ¿Cuánto gané el miércoles?

Resolución

De la información obtenemos que:

$$\begin{array}{l} \text{Lunes : } x \\ \text{Martes: } x + 6 \\ \text{Miércoles: } x + 12 \\ \text{Jueves: } x + 18 \end{array}$$

Además lo del jueves es el cuádruple del lunes; Es decir:

$$x + 18 = 4x$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

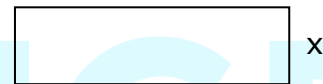
El miércoles ganó: $6 + 12 = \mathbf{S/. 18}$

Ejemplo 5

El largo de una sala excede a su ancho en 4 m. Si cada dimensión aumentara 4 m, el área aumentaría al doble. Hallar las dimensiones de la sala.

Resolución

Haciendo el esquema de una sala, para la primera condición, tenemos:



$$x + 4$$

$$A_1 = x(x + 4)$$

Si las dimensiones aumentaran en 4 m tendríamos:



$$x + 8$$

$$A_2 = (x + 4)(x + 8)$$

Del dato tenemos que: $A_2 = 2A_1$

$$\Rightarrow (x + 4)(x + 8) = 2x(x + 4)$$

$$x + 8 = 2x$$

$$x = 8$$

∴ dimensiones **8 m y 12 m.**

Ejemplo 6

Una mecanógrafa escribe 85 palabras por minuto. Empieza su trabajo a las 8:00 am; y 40 minutos después, empieza otra mecanógrafa que escribe 102 palabras por minuto.

¿A qué hora habrán escrito estas el mismo número de palabras?

Resolución

La 1º mecanógrafa escribe 85 palabras por minuto, entonces:

en x minutos escribirá: $85x$

La 2º mecanógrafa escribe 102 palabras por minutos, y empieza 40 min después, entonces:

en $(x-40)$ min escribirá: $102(x-40)$

Como las mecanógrafas han escrito el mismo número de palabras:

$$102(x-40) = 85x$$

$$102x - 4080 = 85x$$

$$17x = 4080$$

$$x = 240 \text{ min (4 horas)}$$

⇒ hora 8 a.m. + 4 h = **12 m**

Ejemplo 7

En un aula los alumnos están agrupados en bancas de 6 alumnos por banca. Si se les coloca en bancas de 4 alumnos por banca se necesitarían 3 bancas más. Cuántos alumnos hay en el aula?

Resolución

Sea N el número de alumnos en el aula y " x " el número de bancas.

Al agruparlos de 6 en 6 tenemos:

$$N = 6x$$

Al agruparlos de 4 en 4 tenemos:

$$N = 4(x+3)$$

Como son iguales entonces

$$6x = 4x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Finalmente $N = 6 \cdot 6 =$ **36 alumnos**

Ejemplo 8

Con 950 ladrillos se han hecho tres tabiques. En el primero entran una tercera parte más que el segundo, y en este la cuarta parte de los que entran en el tercero. ¿Cuántos ladrillos se emplearon en cada tabique?

Resolución

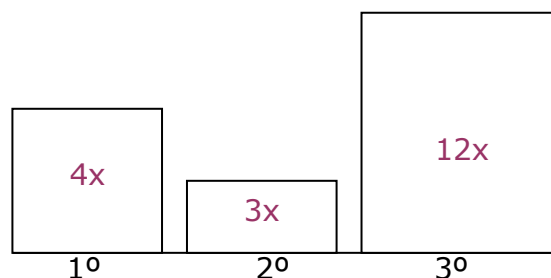
Si la cantidad de ladrillos en el segundo tabique consideramos como **$3x$** , entonces la tercera parte será **x** ; por lo tanto:

Segundo tabique: $3x$

Primer tabique: $3x + x = 4x$

Los ladrillos del segundo tabique son la cuarta parte de los del tercer tabique; esto quiere decir también que lo que hay en el tercero es el cuádruple de lo que hay en el segundo; es decir:
 $4(3x) = 12x$.

Gráficamente



Sumando todos los ladrillos debemos tener 950.

$$4x + 3x + 12x = 950$$

$$19x = 950$$

$$x = 50$$

Primer tabique : 200

Segundo tabique : 150

Tercer tabique : 600

Ejemplo 9

Se tiene tres números tales que el segundo es $\frac{4}{5}$ del primero, el tercero es $\frac{3}{4}$ del segundo y el producto de los tres números es 3840. Hallar el menor.

Resolución

Sea N_1 , N_2 y N_3 los tres números

$$N_2 = \frac{4}{5} N_1 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{4}{5}$$

$$N_3 = \frac{3}{4} N_2 \Rightarrow \frac{N_3}{N_2} = \frac{3}{4}$$

De esta proporcionalidad obtenemos que:

$$N_2 = 4K$$

$$N_1 = 5K$$

$$N_3 = 3K$$

El producto es 3840

$$\Rightarrow (5K)(4K)(3K) = 3840$$

$$60K^3 = 3840$$

$$K^3 = 64$$

$$K = 4$$

∴ el menor es $N_3 = 3(4) = 12$

Ejemplo 10

Se reparte 3000 soles entre 4 personas de tal manera que a la primera le corresponda 400 soles más que a la segunda; a ésta, $\frac{4}{5}$ de lo que le corresponde a la tercera; y ésta 100 soles más de lo que le corresponde a la cuarta. ¿Cuánto recibió la segunda persona?

Resolución

Al repartir los S/. 3000 entre 4 personas y empezando el análisis entre la 2^{da} y 3^{era} persona, luego entre la 1^{era} y la 2^{da} y finalmente entre la 3^{era} y la 4^{ta} tendremos

$$3000 \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 4k + 400 \\ P_2 = 4K \\ P_3 = 5K \\ P_4 = 5k - 100 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 4k+400+4k+5k+5k-100 = 3000$$

$$18k = 2700$$

$$k = 150$$

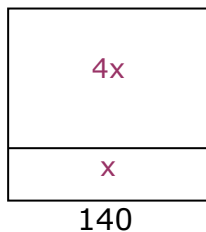
∴ La segunda persona recibió:
 $4(150) = \text{S/. } 600$

Ejemplo 11

De un tonel de 140 litros se extrae tanto como 4 veces no se extrae, de lo que queda se extrae tanto como no se extrae. ¿Cuánto queda en el tonel?

Resolución

Graficando un tonel e interpretando la primera condición, tenemos:



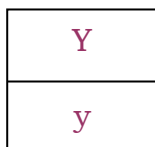
$$4x + x = 140$$

$$5x = 140$$

$$x = 28$$

⇒ Ha quedado 28 litros

Graficando en un tonel lo que a quedado e interpretando la segunda condición, tenemos:



$$y + y = 28$$

$$\Rightarrow y = 14$$

∴ Queda en el tonel **14 litros.**

PROBLEMAS PARA

RESOLVER EN CLASE

- Traducir a su respectiva expresión matemática.
 - El triple, de un número aumentando en 8
 - El triple de un número, aumentado en 8
 - Lo que gana Ana es dos más de lo que gana Betty
 - Ana gana dos veces lo que gana Betty
 - Ana gana dos veces más lo que gana Betty
 - Un número es dos veces menos que otro número
 - La edad de María excede a la de Diana en 19
 - Lo que tiene A excede a B, tanto como 100 excede al doble de B
 - La suma de cuatro impares consecutivos equivale al doble del mayor, mas 6.
 - El doble, del cuadrado de un número disminuido en 6 equivale al exceso de 105 sobre el máximo número de dos cifras.
 - El cuadrado, del doble de un número disminuido en 3
- Al resolver un problema que se reduce a una ecuación de segundo grado un estudiante comete un error en el término independiente de la ecuación y obtiene como raíces 8 y 2. Otro estudiante comete un error en el coeficiente del término de primer grado y obtiene como raíces -9 y -1. La ecuación correcta es:

Rpta:.....
- Se tienen 48 palitos de fósforo, divididos en 3 grupos, del primer grupo se pasan al segundo tantos palitos como hay en este; luego del segundo grupo se pasan al tercero tantos palitos como este tiene, y lo

mismo se hizo del tercero al primero, quedando los tres grupos con la misma cantidad de palitos. ¿Cuántos palitos tenía el primer grupo al inicio?

Rpta:.....

4. Encontrar un número impar, tal que al agregarle sus cuatro impares consecutivos nos dé un total de 555.

Rpta:.....

5. Un kilo de manzanas cuestan 3 soles más medio kilo de manzanas. ¿Cuánto cuesta el kilo y medio?

Rpta:.....

6. El producto de tres números enteros consecutivos es 24 veces el número central. Calcular su suma.

Rpta:.....

7. En un corral hay gallinas y conejos, y el número de patas es 14 más 2 veces el número de cabezas. ¿Cuántos conejos hay?

Rpta:.....

8. En una fiesta habían 68 personas; Un primer caballero bailó con 7 damas; el segundo con 9, el tercero con 11 y así sucesivamente hasta que el último bailó con todas. ¿Cuántas damas habían?

Rpta:.....

9. Un comerciante tenía determinada suma de dinero. El primer año se gastó 100 libras y aumentó el resto con un tercio de este. El año siguiente volvió a gastar 100 lbs y aumentó la suma restante en un tercio de ella. El tercer año gastó de nuevo 100 lbs y después de que hubo agregado su tercera parte, el capital llegó al doble del inicial.

. Hallar el capital inicial.

Rpta:.....

10. Un grupo de abejas igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo el enjambre se posó sobre cierta flor, dejando atrás a $\frac{8}{9}$ de todo el enjambre y sólo una revoloteaba en torno a una flor atraída por el zumbido de una de sus amigas. ¿Cuántas abejas forman el enjambre?

Rpta:.....

11. Entre 4 hermanos tienen 30 manzanas. Si el número de manzanas del primero se incrementa en 1, el del segundo se reduce en 4, el del tercero se duplica y el del cuarto se reduce a la mitad, todos tendrán la misma cantidad. El primero y el tercero tenían juntos.

Rpta:.....

12. Al dividir un número de 3 cifras, entre otro de 2 cifras, se obtiene 11 de cociente y 25 de residuo. Se les toma el complemento aritmético y se les vuelve a dividir, esta vez se obtiene 7 de cociente y 19 de residuo. Hallar la suma de las cifras del dividendo.

Rpta:.....

13. Una persona fabrica un número determinado de sillas. Si duplica su producción y vende 60, le quedan más de 24 sillas; luego fabrica 10 más y vende 28, quedándole entonces menos de 10 sillas. Señale cuántas sillas se fabricaron.

Rpta:.....

14. Un número entero consta de 3 dígitos. El dígito de las centenas es la suma de los otros dos, y el quintuplo de las unidades es igual a la suma de las decenas y de las centenas. Hállese este número

sabiendo que si se invierten los dígitos resulta disminuido en 594.

Rpta:.....

15. Una persona se pone a jugar con cierta suma de dinero en la primera vuelta duplica su dinero y gasta luego S/. 100. En la segunda vuelta gana el doble de lo que tiene y gasta luego S/. 400. En la tercera vuelta triplica su dinero y gasta luego S/. 500. Si aún le quedan S/. 1000, ¿cuánto tenía inicialmente?

Rpta:.....

16. Cuatro personas: A, B, C y D, se pusieron a jugar teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- El que pierda el primero cuadruplicará el dinero de cada uno de los demás .
- El segundo perdedor aumentará S/. 50 a c/u de los demás.
- El tercero aumentará S/. 20 a cada uno de los demás.
- El cuarto aumentará S/. 30 a cada uno.

Se sabe que perdieron en el orden alfabético y al finalizar la cuarta partida cada uno quedó con S/150, S/180, S/120 y S/40 , respectivamente. Cuánto tenía C al principio ?

Rpta:.....

17. En una playa de estacionamiento hay 20 vehículos entre autos y motos. Si cada auto lleva una llanta de repuesto, y en total se cuentan 73 neumáticos. ¿Cuántos autos hay?

Rpta:.....

18. Al vender una articulo pensé ganar la mitad de los me costó, pero al momento de vender tuve que rebajar la mitad de lo que pensé ganar, por lo que gané S/. 600

menos de lo que me costó. ¿Cuánto me costo?

Rpta:.....

19. El número de alumnos de un salón puede ubicarse en filas de 9. Pero si se ponen dos alumnos menos en cada fila hay que poner dos filas más. ¿Cuántos alumnos hay?

Rpta:.....

20. Dos cirios de igual altura se encienden simultáneamente, el primero se consume en cuatro horas y el segundo en tres horas. Si cada cirio se quemó en forma constante, cuántas horas después de haber encendido los cirios, la altura del primero es el doble de del segundo?.

Rpta:.....

21. En una reunión se cuentan tantos caballeros como tres veces el número de damas. Si luego de retirarse 8 parejas el número de caballeros que aún quedan es igual a 5 veces el número de damas, cuántos caballeros habían inicialmente?.

Rpta:.....

22. Un matrimonio dispone de una suma de dinero para ir al teatro con sus hijos. Si compra entradas de 8 soles le faltaría 12 soles y si adquiere entradas de 5 soles le sobraría 15 soles ¿ Cuantos hijos tiene el matrimonio?.

Rpta:.....

23. Lo que cobra y lo que gasta un profesor suman 600. Lo que gasta y lo que cobra esta en la relación de 2 a 3. En cuánto tiene que disminuir el gasto para que dicha relación sea de 3 a 5.

Rpta:.....

EDADES

Este tema corresponde esencialmente al planteamiento de ecuaciones. La solución a este tipo de problema involucra reconocer cada uno de los siguientes elementos:

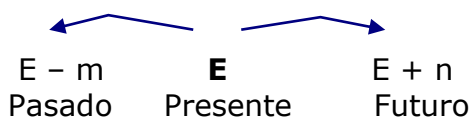
- **SUJETOS:** Debemos identificar el número de sujetos que intervienen.
- **TIEMPO** (verbo): debemos tener presente que la acción del problema se desarrolla en distintos tiempos.
 "Hace 5 años"
 "Actualmente"
 "Dentro de 8 años".
- **CONDICIONES:** relación entre los personajes, en el tiempo.
 "Hace 5 años tu edad era el triple de la edad que tengo"
 "Dentro de 10 años mi edad será el doble de la que tenías hace 3 años".

PROBLEMAS SOBRE EDADES

TIPO I:

CUANDO INTERVIENE LA EDAD (E) DE UN SOLO SUJETO

Analicemos en tres tiempos:
 Hace "m" años Dentro de "n" años



Ejemplo 1

Dentro de 20 años Pedro tendrá el doble de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tendrá dentro de 2 años?

Resolución:

Edad actual: E
 Edad dentro de 20 años: E + 20

Edad hace 10 años: E - 10

$$\Rightarrow \text{Podemos plantear:}$$

$$E + 20 = 2(E - 10)$$

$$\underline{E + 20 = 2E - 20}$$

$$\underline{\quad\quad\quad E = 40}$$

∴ Dentro de 2 años tendrá **42 años**

Ejemplo 2

Si al cuádruplo de la edad que tendré dentro de 10 años, le restamos el triple de la edad que tenía hace 5 años resulta el doble de mi edad actual. Que edad tenía hace 5 años.

Resolución:

Edad actual: E
 Dentro de 10 años: E + 10
 Hace 5 años: E - 5
 ⇒ Planteando la ecuación:

$$4(E + 10) - 3(E - 5) = 2E$$

$$4E + 40 - 3E + 15 = 2E$$

$$\quad\quad\quad E = 55$$

∴ Hace 5 años tenía **50 años**

Ejemplo 3

Pedro tiene 45 años. Dentro de cuántos años tendrá el doble de la edad que tenía hace 15 años?

Resolución:

Edad actual: 45 años
 Hace 15 años tenía: 45 - 15 = 30 años
 El doble de esa edad es: 2(30) = 60 años
 El tendrá 60 años dentro de:
 60 - 45 = **15 años**

TIPO II:

CUANDO INTERVIENEN LAS EDADES DE DOS O MÁS SUJETOS

Es conveniente para la solución de este tipo de problema el uso de un cuadro. Por ejemplo, analicemos para tres sujetos en tres tiempos y luego completamos el cuadro:

		TIEMPOS		
		FUTURO	PASADO	PRESENTE
S U J E T O	A		30	
	B	15		
	C			42

Se observa que:

- La diferencia de edades entre dos personas, en el transcurso del tiempo no varía.

Ejemplo 4

El le dice a Ella: "Yo tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tienes". ¿Cuántos años tienen ambos, si sus edades suman 50 años?

Resolución:

Empleando un cuadro para 2 personajes, en dos tiempos, tenemos:

	Pasado	Presente.
EL	y	3x
ELLA	x	y

Aplicando diferencia de edades, en el pasado y el presente, y teniendo en cuenta que no varía, tenemos:

$$\begin{aligned}
 y - x &= 3x - y \\
 y + y &= x + 3x \\
 2y &= 4x \\
 y &= 2x
 \end{aligned}$$

Del dato, que sus edades actuales suman 50 años:

$$\begin{aligned}
 3x + y &= 50 \\
 3x + 2x &= 50 \\
 x &= 10
 \end{aligned}$$

∴ El tiene $3x = 3(10) = 30$ años
 Ella tiene y; es decir: **20 años**

Ejemplo 5

Dentro de 20 años, la edad de María será a la de Diana como 4 es a 3. ¿Cuál es la edad de ambas si hace 13 años la edad de María era el quintuplo de la de Diana?

Resolución:

Empleando cuadro de doble entrada, para dos personajes y tres tiempos. Partiendo de la información en el futuro (**dentro de 20 años**), tenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
María			4k
Diana			3k

Con este dato completamos el cuadro, para el presente y el pasado (**hace 13 años**).

	Pasado	Presente	Futuro
María	4k - 33	4k - 20	4k
Diana	3k - 33	3k - 20	3k

Teniendo en cuenta que hace 13 años la edad de María era el quintuplo del de Diana, planteamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 4k - 33 &= 5(3k - 33) \\
 4k - 33 &= 15k - 165 \\
 11k &= 132 \\
 k &= 12
 \end{aligned}$$

∴ Edad de María = $4(12) - 20 = 28$ años
 Edad de Diana = $3(12) - 20 = 16$ años

Ejemplo 6

Roberto tiene 24 años; su edad es el séxtuplo de la edad que tenía Betty cuando Roberto tenía la tercera parte de la edad que tiene Betty. Qué edad tiene Betty?

Resolución:

	Pasado	Presente
Roberto	x	24 = 6.4
Betty	4	3x

Aplicando diferencias de edades o sumando en aspa, tenemos:

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

$$\therefore \text{Edad de Betty} = 3x = 3(7) = \mathbf{21 \text{ años}}$$

Ejemplo 7

Hallar la edad de un padre y la de su hijo sabiendo que hace 8 años la edad del primero fue el cuádruple de la del segundo; dentro de 12 años sólo será el doble de la de su hijo.

Resolución:

De acuerdo a los datos, emplearemos un cuadro para dos personas en tres tiempos

	Hace 8 años	Presente	Dentro de 12 años
Padre			
Hijo			

$$P=4H$$

$$P=2H$$

- Digamos que hace 8 años el hijo tenía "x" años; en tanto que el padre tenía "4x".
- En la actualidad el hijo tendrá "x+8" y el padre "4x + 8"
- Dentro de 12 años tendrán "x + 20" y "4x + 20".

Ubicando esta información en el cuadro tenemos:

	Hace 8 años	Presente	Dentro de 12 años
Padre	4X →	4X + 8	4X + 20
Hijo	X →	X + 8	X + 20

De la segunda condición:

$$P = 2H$$

$$4x + 20 = 2(x + 20)$$

$$4x + 20 = 2x + 40$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

$$\therefore \text{Edad del Padre} = 4(10) + 8 = \mathbf{48 \text{ años}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Hijo = 18 \text{ años}}$$

Ejemplo 8

José le dice a Pablo: "Yo tengo el doble de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tienes; pero cuando tu tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 63 años". Hallar ambas edades actuales.

Resolución:

Empleando cuadro para dos personas y en tres tiempos; así como ubicando la información de la primera condición del problema, tenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
José	Y	2X	
Pablo	X	Y	

De la segunda condición: "nuestras edades sumarán 63 años"

Si Pablo tendrá 2x, entonces José tendrá 63 - 2x

	Pasado	Presente	Futuro
José	Y	2X	63 - 2X
Pablo	X	Y	2X

Por diferencia de edades (no cambia con el transcurso del tiempo):

- Tiempos pasado y presente
 $y - x = 2x - y$
 $2x = 3y \dots (I)$
- Tiempos presente y futuro
 $2x - y = (63 - 2x) - 2x$
 $2x - y = 63 - 4x$
 $y = 6x - 63 \dots (II)$

Reemplazando en (I) tenemos

$$2(6x - 63) = 3x$$

$$12x - 126 = 3x$$

$$x = 14$$

En (II):

$$y = 6(14) - 63 = 21$$

⇒ las edades son:

José: $2(14) = \mathbf{28 \text{ años}}$

Pablo : $\mathbf{21 \text{ años}}$

TIPO III:

USO DEL CRITERIO ARITMÉTICO

Aplicaremos la siguiente relación:

$$E = \text{Año de referencia} - \text{Año de nac.}$$

Ejemplo 9

Una persona nació en $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ cumplió $(a+b)$ años. ¿En qué año cumplió $a(b)$ años?

Resolución:

Empleando

$$\text{Edad} = \text{Año Ref.} - \text{Año Nac.}$$

$$\text{Tenemos: } a + b = \overline{19ba} - \overline{19ab}$$

descomponiendo polinómicamente:

$$a+b = 1900+10b+a-(1900+10a+b)$$

$$a+b = 1900+10b+a-1900-10a-b$$

desarrollando encontramos que:

$$10a = 8b$$

$$5a = 4b$$

Teniendo en cuenta que a y b son números de una cifra, esta igualdad cumple para: $a = 4$ y $b = 5$

$$\Rightarrow \text{Año de Nacimiento: } 1945$$

Para saber en que año cumplió $a(b)$ años, es decir: $4(5) = 20$ años esta edad la sumaremos a su año de nacimiento; es decir:

$$1945 + 20 = \mathbf{1965}$$

Ejemplo 10

Una persona tiene en 1988 tantos años como el producto de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es su edad actual (2004), considerando que este año ya celebró su onomástico?

Resolución:

Considerando año de nacimiento: $\overline{19ab}$

Tendremos que:

$$a(b) = 1988 - \overline{19ab}$$

$$a(b) = 1988 - 1900 - 10a - b$$

ordenando

$$10a + b + a(b) = 88$$

$$10a + b(1 + a) = 88$$

Esta igualdad cumple para:

$$a = 6 \text{ y } b = 4$$

ya que:

$$10(6) + 4(1 + 6) = 88$$

$$\Rightarrow \text{Año de nacimiento: } 1964$$

$$\therefore \text{Edad actual} = 2004 - 1964$$

$$= \mathbf{40 \text{ años}}$$

Ejemplo 11

Un profesor nació en $\overline{19ab}$ y en 1990 tuvo $(a + b)$ años. En que año llegó a tener $(2a + b)$ años?

Resolución:

$$\text{Edad} = \text{Año de ref.} - \text{Año de nac.}$$

$$a + b = 1990 - \overline{19ab}$$

$$a + b = 1990 - 1900 - 10a - b$$

ordenando

$$11a + 2b = 90$$

esta igualdad cumple para:

$$a = 8 \text{ y } b = 1$$

$$\text{porque } 11(8) + 2(1) = 90$$

$$\Rightarrow \text{Año de nacimiento: } 1981$$

$$\therefore \text{Llegó a tener: } 2a+b = 2(8)+ 1 = 17$$

$$\text{en: } 1981 + 17 = \mathbf{1998}$$

Ejemplo 12

Juan le dice a José: Cuando tú tenías 7 años menos de la edad que yo tengo, yo tenía 3 años menos de la edad que tú tienes y cuando tenga el doble de la edad que tu tienes, nuestras edades sumarán 66 años. ¿Qué edad tiene José?

Resolución:

Como el problema relaciona a tres tiempos, entonces hacemos el esquema para el primer párrafo:

	Pasado	Presente	Futuro
Juan	$y-3$	x	
José	$x-7$	y	

Según el segundo párrafo tenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
Juan		x	$2y$
José		y	$66-2y$

De los dos esquemas, aplicando diferencia de edades, tenemos:

$$(y-3)-(x-7) = x-y \Rightarrow x = y+2$$

$$2y-(66-2y) = x-y \Rightarrow x = 5y-66$$

Igualando:

$$5y - 66 = y+2$$

$$4y = 68$$

$$y = 17$$

∴ José tiene **17 años**

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Si al doble de mi edad actual, se le quita mi edad aumentada en 10, se tendría 19. ¿Qué edad tengo?

Rpta:.....

2. La tercera parte de la edad de María es 13 años más que la edad de Norma y el quíntuplo de la edad de Norma es 25 años menos que la edad de María. Hallar la edad de Norma.

Rpta:.....

3. Si Ricardo hubiera nacido en el año 195a en el año 2030 tendría ba años. Sin embargo nació en el año 19aa. ¿Cuántos años tenía en el año 1999?

Rpta:.....

4. La edad de Carlos en 1975 era tanto como la mitad de las dos últimas cifras del año de su nacimiento, que edad tiene actualmente (2004) si ya celebró su cumpleaños.

Rpta:.....

5. "Diego" y su abuelo tenían en 1928 tantos años como indica las dos últimas cifras del año de su nacimiento. Cual era la edad del abuelo cuando nació "Diego".

Rpta:.....

6. Bertha tenía en 1962, tantos años como el producto de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál era su edad en aquel año, si en un año más su edad será un número cuadrado perfecto?

Rpta:.....

7. Elsa es 6 años mas joven que Ivan. Hace 3 años Ivan tenía el triple de la edad que Elsa tenía entonces. Encontrar la edad de Ivan.

Rpta:.....

8. Miguel tiene 5 años menos que Doris. Hace cuatro años la suma de sus edades era 21 años. ¿Qué edad tiene Doris?

Rpta:.....

9. Denise es 3 veces mayor de edad que Clara. Hace 5 años la suma de sus edades era 40 años. ¿Qué edad tiene Clara?

Rpta:.....

10. Juan tiene 2 años más que su hermano Roberto y la edad del padre es el cuádruplo de la edad de su hijo Roberto. Si hace 5 años la suma de las edades de los tres era 47 años. ¿Cuántos años tiene actualmente el Padre?

Rpta:

11. La edad de un Padre supera en 5 años a la suma de las edades de sus 3 hijos. Dentro de 10 años su edad será el doble que la del primero, dentro de 20 años su edad será el doble del segundo y dentro de 30 años será el doble que la del tercero.

¿Cuál es la edad del hijo menor?

Rpta:.....

12. La edad actual de un hijo es los $\frac{4}{9}$ de la edad de su padre, si dentro de 5 años, la mitad de la edad del padre será igual a la del hijo. ¿Cuál es la edad del Padre?

Rpta:.....

13. Romeo le dice a Julieta: Tu tienes 18 años pero cuando tu tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 48 años. ¿Qué edad tendrá Romeo dentro de 8 años?

Rpta:.....

14. Un padre le dice a su hijo: Hace 8 años mi edad era el cuádruplo de la edad que tu tenías, pero dentro de 8 años únicamente será el doble. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

Rpta:.....

15. Toño le dice a Alex: "Cuando tu tenías 7 años menos de la edad que yo tengo, yo tenía 3 años menos de la edad que tu tienes y cuando tenga el doble de la edad que tu tienes, nuestras edades sumarán 66 años. ¿Qué edad tiene Toño?

Rpta:.....

16. Un discípulo le dice a su maestro: "Cuando tu tenías el triple de la edad que yo tengo, yo tenía la onceava parte de la edad que tu tienes, pero cuando tú tengas el cuádruplo de la edad que tengo yo, la suma de nuestras edades será 80 años.

¿Qué edad tiene el discípulo?

Rpta:.....

17. Dentro de 8 años la suma de nuestras edades será 42 años; pero hace "n" años la diferencia de nuestras edades era de 8 años. ¿Hace cuántos años la edad de uno era el triple de la del otro?

Rpta:.....

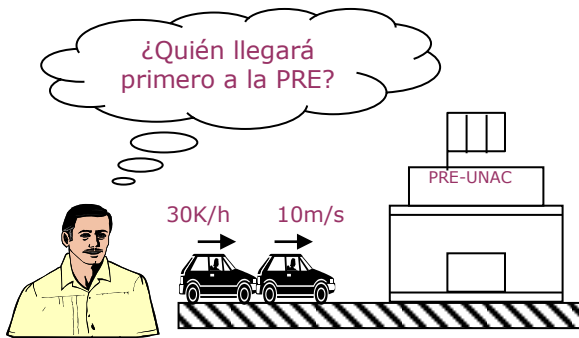
18. Cuando transcurran desde hoy tantos años como los años que pasaron desde que nací hasta la edad que tenía hace 10 años, tendré el cuadrado de la edad que tenía hace 9 años. ¿Cuántos años tenía hace 3 años?

Rpta:.....

19. Saúl le dice a Erick: Tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, yo tendré el doble de la edad que tenías hace 12 años. Cuántos años suman sus edades actuales

Rpta:.....

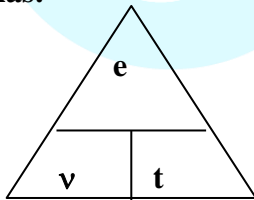
MÓVILES



Los problemas referentes a móviles consideran a carros, trenes, aviones o personas; asimismo, hacen mención a metros por segundo, kilómetros por hora o a cualquier otra terminología relacionada con el movimiento.

Estos problemas se resuelven básicamente con la fórmula:
distancia = rapidez x tiempo, que corresponde a un movimiento uniforme.

Además:



$$e = v \cdot t \quad v = \frac{e}{t} \quad t = \frac{e}{v}$$

e = espacio o distancia recorrida
v = rapidez empleada
t = tiempo empleado

Definiciones Importantes:

a) Rapidez (v): Característica física de un móvil que nos informa que tan rápido este móvil pasa de una posición a otra. Se expresa en unidades de longitud por tiempo (e/t); ejemplos: m/s, m/min; km/h.

b) Velocidad (\vec{v}): Es un magnitud vectorial que nos indica la rapidez con la que se mueve un objeto (móvil) y la dirección en que lo hace.

Para la solución de estos problemas debemos tener cuidado que las unidades sean consistentes; por ejemplo si la rapidez esta expresada en m/s, el tiempo debe estar en segundos y la distancia en metros.

Ejemplo 1:

Cinco horas demora un auto en viajar de Lima a Huancayo a razón de 80 km/h. Si cada 10 km en la carretera que une ambas ciudades se desea colocar un banderín, ¿Cuántos banderines se requieren, considerando que debe haber uno al principio y otro al final?

Resolución

Debemos primero calcular la distancia entre Lima y Huancayo, para lo cual contamos con la rapidez con que viaja el auto y el tiempo que emplea; por lo tanto:

$$d = v \times t = \frac{80\text{km}}{\text{h}} \times 5 \text{ h}$$

$$d = 400 \text{ km}$$

Cálculo del número de banderines a colocar; para lo cual tenemos:

$$d_T = 400 \text{ km}$$

$$d_u = 10 \text{ km}$$

$$N^\circ \text{ banderines} = \frac{400}{10} + 1 = 41$$

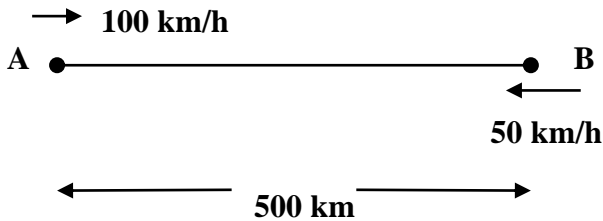
Rapidez Promedio:

Se refiere a la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total empleado

$$v_p = \frac{\text{Distancia Total}}{\text{Tiempo Total}}$$

Ejemplo 2:

Un auto viaja de una ciudad A a otra B, distantes 500 km, a razón de 100 km/h y regresa hacia A con una rapidez de 50 km/h. Hallar la rapidez promedio durante el viaje de ida y vuelta.



Resolución

Tiempo de viaje de ida:

$$t_i = \frac{500\text{km}}{100\text{km/h}} = 5\text{h}$$

Tiempo de viaje de regreso

$$t_r = \frac{500\text{km}}{50\text{km/h}} = 10\text{h}$$

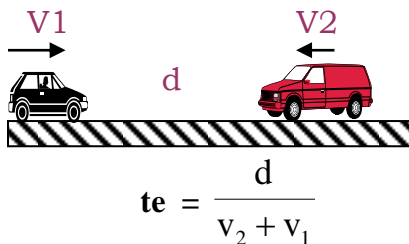
$$\Rightarrow \text{tiempo total} = 5 + 10 = 15 \text{ h.}$$

$$\text{Distancia total recorrida} = 500 + 500 = 1000 \text{ km.}$$

$$\therefore V \text{ prom} = \frac{1000\text{km}}{15\text{h}} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3} \text{ km/h}$$

Tiempo de encuentro:

Si dos móviles parten simultáneamente de diferentes puntos y viajan en la misma dirección pero en sentidos opuestos, una el encuentro del otro, se encontrarán en un tiempo t_e , definido por:



donde:

t_e : tiempo de encuentro

d : distancia que los separa al inicio

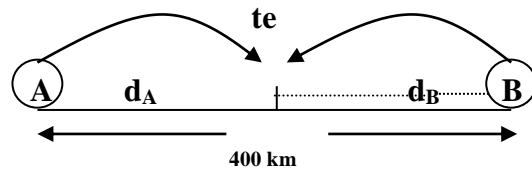
v_2 ; v_1 : rapidez con la que viajan los móviles.

Ejemplo 3:

La distancia entre dos ciudades es de 400 km. Un auto parte de la ciudad A hacia B a razón de 50 km/h y en el mismo instante parte de B hacia A otro auto a razón de 30 km/h. Después de cuánto tiempo se encontrarán y a que distancia del punto B?.

Resolución

$$V_A = 50 \text{ km/h} \quad V_B = 30\text{km/h}$$



Cálculo del tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{400\text{km}}{(50+30)\text{km/h}} = \frac{400\text{km}}{80\text{km/h}} = 5\text{h}$$

Cálculo de la distancia de B hasta el punto de encuentro:

$$d_B = V_B \times t_e = 30 \text{ km/h} \times 5 \text{ h} = 150 \text{ km}$$

Tiempo de Alcance:

Si dos móviles parten simultáneamente y viajan en la misma dirección; en el mismo sentido y el segundo viaja con mayor rapidez, entonces lo alcanzará el primero en un tiempo t_a , definido por:



$$t_a = \frac{d}{V_2 - V_1}$$

donde:

t_a : tiempo de alcance

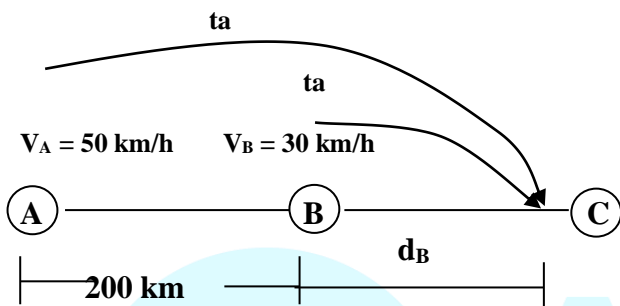
d : distancia que los separa al inicio

v_2 ; v_1 : rapidez con la que viajan los móviles.

Ejemplo 4:

La distancia entre dos ciudades A y B, es de 200 km. Un auto parte de la ciudad A hacia otra C, situada a 350 km al Este de B, a razón de 50 km/h; en el mismo instante parte de B otro auto hacia C; a razón de 30 km/h. Después de cuánto tiempo alcanzará el móvil que partió de A al que partió de B y a qué distancia de C ?

Resolución



Cálculo de tiempo de alcance:

$$t_a = \frac{200\text{km}}{(50 - 30)\text{km/h}} = \frac{200}{20} = 10\text{h}$$

Distancia recorrida por B:

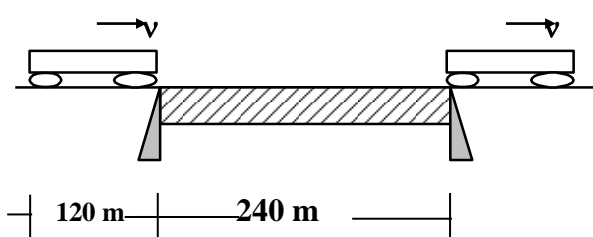
$$d_B = \frac{30\text{km}}{\text{h}} \times 10\text{h} = 300\text{km}$$

⇒ Se da el alcance a 50 km de C.

Ejemplo 5:

Un Tren de 120 metros de longitud se demora en pasar por un puente, de 240 metros de largo, 6 minutos. ¿Cuál es la rapidez del tren?

Resolución



La distancia total que recorre el tren para cruzar es:

$$240\text{ m} + 120\text{ m} = 360\text{ m}$$

En un tiempo de 6 min (360 seg)

$$v = \frac{360\text{m}}{360\text{seg}} = 1\text{m/seg}$$

Ejemplo 6:

Luis viajó de Lima a Huancayo empleando 8 horas. Si al regreso aumenta su rapidez en 15 km/h llegando en 6 horas, ¿cuál es la distancia total recorrida?.

Resolución

A la ida recorre una distancia "D" con una rapidez de v km/h llegando en 8 h.

$$\Rightarrow D = 8v \dots\dots (I)$$

A la vuelta recorre la misma distancia "D" con una rapidez de $(v + 15)$ km/h llegando en 6 h.

$$\Rightarrow D = 6(v+15) \dots\dots (II)$$

Como (I) y (II) son iguales, tenemos:

$$8v = 6(v + 15)$$

$$8v = 6v + 90$$

$$2v = 90 \Rightarrow v = 45\text{ km/h}$$

∴ distancia total recorrida = 2D

$$\text{En (I)} = 2(8 \cdot 45) = 720\text{ km.}$$

Ejemplo 7

La distancia entre T y L es de 550 km. Abner sale de T a L y Josué de L a T, ambos simultáneamente a las 10 pm. El ómnibus en que viaja Abner recorre a un promedio de 90 km por hora y el de Josué a 85 km por hora ¿A qué hora y a qué distancia de T se cruzarán?

Resolución

$$v = 90\text{ km/h}$$

$$v = 85\text{ km/h}$$



Para saber a que hora se cruzan, aplicaremos tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{550\text{km}}{(90+85)\text{km/h}} = 3.14\text{h} \approx 3\text{h}09 \text{ min.}$$

⇒ Se cruzarán a:
10 pm + 3 h 9 minutos
 1:09 am

$$D_T = 90 \times 3.14 = 282 \text{ km } 857\text{m}$$

Ejemplo 8:

Un ladronzuelo corre a razón de 8m/s. Un policía que se encuentra a 150 m de distancia empieza a perseguirlo y logra alcanzarlo luego de 4 min. Con qué rapidez corrió el policía.

Resolución

Aplicando tiempo de alcance

$$t_a = \frac{d}{v_p - v_e}$$

$$t_a = 4 \text{ min}$$

$$\Rightarrow (4 \times 60) \text{ seg} = \frac{150\text{m}}{(v_p - 8)\text{m/s}}$$

$$240 = \frac{150}{v_p - 8}, \text{ simplificando}$$

$$8 = \frac{5}{v_p - 8}$$

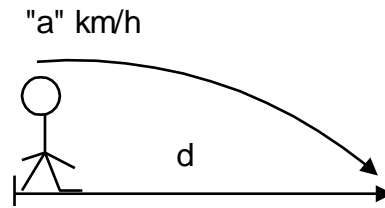
$$8 v_p - 64 = 5$$

$$v_p = \frac{69}{8} \text{ m/seg} = 8,62 \text{ m/s}$$

Ejemplo 9

“Vladi” sale de su casa con una rapidez de “a” km/h y dos horas más tarde “Fuji” sale a buscarlo siguiendo la misma ruta, con una rapidez de “a+b” km/h. ¿En cuántas horas lo alcanzará?

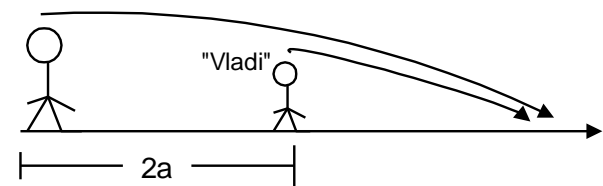
Resolución



“Vladi” en 2 horas le ha tomado una ventaja de:

$$d = v \cdot t \qquad d = 2a$$

“Fuji”



Que “fuji” debe descontarlo en:

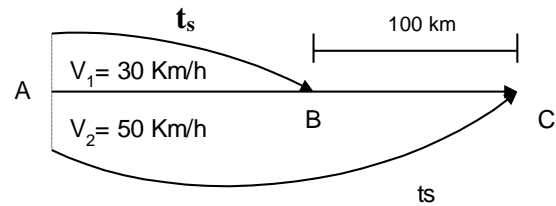
$$t_a = \frac{d}{v_f - v_v} = \frac{2a}{(a+b) - a} = \frac{2a}{b}$$

Ejemplo 10

Dos motociclistas parten de un punto A, en el mismo sentido, a razón de 30 y 50 km/h. ¿Que tiempo deberá transcurrir para que estén separados 100 km?

Resolución

Con los datos hacemos el siguiente diagrama:



Conforme pasa el tiempo el motociclista que viaja con mayor rapidez se va separando más. Para determinar el tiempo que emplean para estar separados 100 km aplicamos:

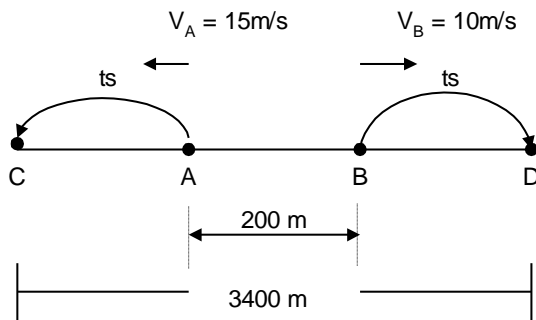
$$t_s = \frac{d_s}{v_2 - v_1} = \frac{100\text{km}}{(50-30)\text{km/h}} = 5\text{h}$$

Ejemplo 11

Dos ciclistas están separados por 200 metros y avanzan en sentidos contrarios con velocidades de 15 y 10 m/s separándose cada vez más. En qué tiempo estarán separados 3400 m?

Resolución

Con los datos efectuamos el siguiente diagrama:



Ambos ciclistas, el que parte de A hasta C y el que parte de B hasta D, emplean el mismo tiempo para separarse adicionalmente:

$$3400 - 200 = 3200 \text{ m}$$

$$ts = \frac{d}{V_A + V_B} = \frac{3200\text{m}}{(10+15)\text{m/s}} = 128\text{seg}$$

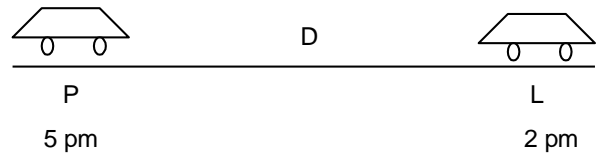
$$ts = 2 \text{ min con } 8 \text{ seg.}$$

Ejemplo 12

Una auto parte de Piura a las 5 pm y llega a Lima el día siguiente a las 2 pm otro auto sale de Piura a las 7 pm y llega a Lima el día siguiente a las 9 am. ¿A qué hora el segundo auto pasó al primero?

Resolución

Analicemos bajo el siguiente esquema:



Ambos autos recorren la misma distancia, D entre Piura y Lima, empleando diferentes tiempos

$$t_1 = 21 \text{ horas}$$

$$t_2 = 14 \text{ horas}$$

la rapidez con la que viajan son:

$$v_1 = \frac{D}{21} ; \quad v_2 = \frac{D}{14}$$

Como el auto 1 partió dos horas antes que el auto 2, le toma una ventaja "d" equivalente a:

$$d = v \cdot t = \frac{D}{21} \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2D}{21}$$

El auto 2 que es más veloz lo alcanzará y lo pasará en un tiempo t_a :

$$t_a = \frac{d}{v_2 - v_1} = \frac{\frac{2D}{21}}{\frac{D}{14} - \frac{D}{21}} = \frac{\frac{2D}{21}}{\frac{3D - 2D}{42}} = \frac{2D}{D} = \frac{21}{42}$$

$$t_a = \frac{2D \times 42}{21 \times D} = 4\text{h}$$

∴ el 2º auto pasó al 1º a las:

$$7 \text{ pm} + 4 \text{ h} = 11 \text{ pm}$$

EJERCICIO

1. Una persona viaja en auto de Lima a Huaraz con una velocidad constante de 60 Km/h y el regreso lo hace a 80 km/h. Si en total ha empleado 14 horas, ¿cuántos kilómetros a recorrido?

Rpta.:.....

2. Un alumno del Centro Preuniversitario, viajando en ómnibus a razón de 40 km/h, generalmente llega a tiempo; sin embargo un día llegó con un retraso de 10 minutos, debido a que el ómnibus sólo pudo desarrollar 30 km/h. ¿A qué distancia del Centro Preuniversitario toma el ómnibus el estudiante?

Rpta.:.....

3. Una persona sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a las 8 a.m. Un día salió atrasado 25 minutos y duplica su rapidez y aún así llega con 10 minutos de atraso. ¿Cuánto tiempo demora normalmente?

Rpta.:.....

4. Dos autos con velocidades de 60 m/s y 40 m/s, se introducen por un mismo lado de un túnel, uno de ellos, aparece 2 segundos después que el otro. ¿Cuál es la longitud del túnel?

Rpta.:.....

5. Un tren de 200m de longitud y otro de 250m viajan sobre vías paralelas a 72 Km/h y 90 Km/h. Hallar:

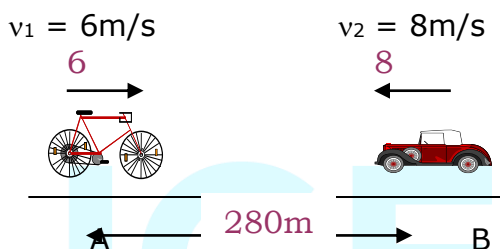
- a) ¿En qué tiempo se cruzan, si viajan en sentidos opuestos?
- b) ¿En qué tiempo el más rápido pasa al otro, si viajan en el mismo sentido?

Rpta.:.....

6. Un bote a motor desarrolla una rapidez de 40 km/h en aguas tranquilas. Si el mismo bote marcha en un río, en contra de la corriente durante 2 horas avanza 60 Km. Luego da la vuelta y viaja río abajo durante una hora y se detiene. ¿A qué distancia del punto de partida se detuvo?

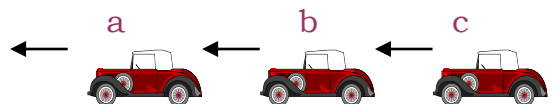
Rpta.:.....

7. En el siguiente gráfico, después de que tiempo el móvil "1" distará de B tanto como el móvil "2" distará de "A"?



Rpta.:.....

8. Los móviles están igualmente distanciados y pasan simultáneamente como indica el gráfico, en el mismo sentido con velocidades: a, b y c. Luego de un tiempo se encuentran en un mismo punto. Hallar la velocidad de b en función de a y c.



Rpta.:.....

9. Un automóvil que viaja a 60 Km/h pasa por un punto A; otro automóvil que viaja a 40 km/h pasa, en el mismo instante, por un punto B. El punto B está situado a la derecha del punto A y entre estos dos puntos hay una distancia de 80 km. Ambos siguen la misma dirección y el

mismo sentido. Se desea saber a qué distancia del punto A, se encontrarán.

Rpta.:.....

10. Un tren parte a las 8:20 para hacer un recorrido de 500 Km; lo que efectúa en 16h 40 min. ¿Qué velocidad debe llevar un segundo tren que parte 2h 58 min después que el primero, para que alcance a éste en una estación situada a 356 km del punto de partida?

Rpta.:.....

11. Dos autos arrancan del mismo punto viajando en sentidos opuestos. La velocidad de uno es de 80 km/h hacia el norte y la del otro es 70 km/h. hacia el sur. ¿En cuántas horas llegan a separarse 375Km?

Rpta.:.....

12. Un carro sale de A hacia B a 80 km/h y regresa a 50 km/h, después de 16 horas. Si el carro se detuvo en B por 2 horas y 1 hora en el camino de regreso. Determinar la distancia AB.

Rpta.:.....

13. Viajando a 40 km/h un piloto llega a su destino a las 16 horas; viajando a 60 km/h llegaría a las 14 horas. Si desea llegar a las 15 horas, ¿a qué velocidad debe ir?

Rpta.:.....

14. Abel salió en su carro con una rapidez de 40 km/h. Dos horas después María salió del mismo lugar manejando por la misma carretera a 50 Km/h. ¿Cuántas horas había manejado María cuando alcanzó a Abel?

Rpta.:.....

15. Sale un tren hacia el norte con velocidad de 30 km/h, luego de 10 min, sale otro también hacia el norte y con la misma velocidad. Con qué velocidad en km/h constante venía un tren desde el norte, si se cruzó con el primer tren en cierto instante y luego de 4 min con el segundo tren

Rpta.:.....

16. Una liebre perseguida por un galgo se encuentra a 80 saltos delante del galgo. La liebre da 4 saltos mientras el galgo da 3; pero 5 saltos de galgo equivalen a 7 saltos de la liebre. ¿Cuántos saltos dio la liebre antes de ser alcanzada por el galgo?

Rpta.:.....

17. Dos barcos parten de dos orillas opuestas de un río, siguiendo una dirección perpendicular a las orillas y se encuentran por primera vez a 120 metros de una orilla, llegan y vuelven al punto de partida, produciéndose el nuevo encuentro a 150 metros de la otra orilla. Hallar el ancho del río

Rpta.:.....

18. Cuando un bote a motor navega aguas arriba, en un río, durante 3 horas y apaga el motor durante media hora, puede retornar al punto de partida en 2 horas. Cuánto tiempo podrá demorarse en retornar si repite la experiencia pero ahora aguas abajo?

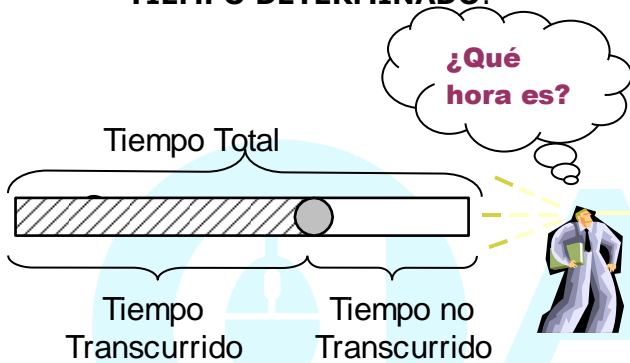
Rpta.:.....

RELOJES

Capítulo relacionado en gran parte con el tema de planteo de ecuaciones y Razonamiento Lógico.

Los relojes y su utilidad para la medición del tiempo son motivo de una gran variedad de problemas y acertijos que para un mejor estudio se trata como tema aparte, teniendo en cuenta los siguientes objetivos específicos

- ANALIZAR Y COMPRENDER LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO TRANSCURRIDO Y EL TIEMPO NO TRANSCURRIDO, PARA UN TIEMPO DETERMINADO.**



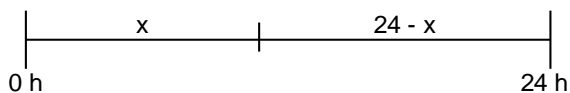
Ejemplo 1

¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual a las 3/5 de lo que falta para terminar el día?

Resolución

Un día: 24 horas
 Tiempo transcurrido: x
 Tiempo que falta transcurrir: $24-x$

Gráficamente



Planteando una ecuación, tenemos:

"parte transcurrida" "es" $\frac{3}{5}$ ("falta para terminar")

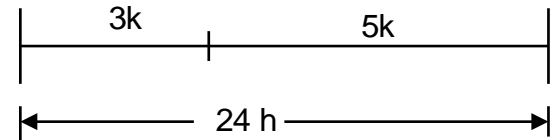
$$x = \frac{3}{5} (24 - x)$$

$$5x = 72 - 3x$$

$$8x = 72 \Rightarrow x = 9$$

$$\therefore \text{Hora} = 9 \text{ h.} = \mathbf{9 \text{ am}}$$

Otra forma: $\frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{t. que falta transcurrir}} = \frac{3}{5}$



$$3k + 5k = 24$$

$$k = 3$$

$$\Rightarrow \text{Hora} = 3(3) = \mathbf{9 \text{ horas}}$$

Ejemplo 2:

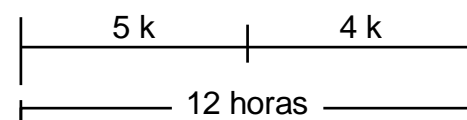
A que hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a 5/4 de lo que falta para las 12 del mediodía.

Resolución

En el primer ejemplo el intervalo de tiempo involucrado era todo el día (24 horas); en este caso es sólo el medio día; es decir:



$$\frac{\text{Tiempo Transcurrido}}{\text{Tiempo que falta t.}} = \frac{5}{4}$$



$$9k = 12 \quad k = 4/3$$

\Rightarrow Las Horas transcurridas son:

$$5 (4/3) = 20/3 = 6 \frac{2}{3} \text{ h}$$

6 Horas 40 min.

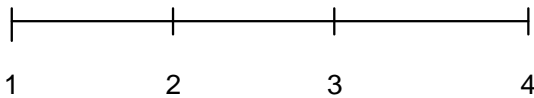
$$\therefore \text{Hora que marca el reloj} = \mathbf{6:40 \text{ am.}}$$

Ejemplo 3

Son más de las 2 sin ser las 3 de esta tarde, pero dentro de 40 minutos faltarán para las 4 el mismo tiempo que ha transcurrido desde la 1 hasta hace 40 minutos. ¿Qué hora es?

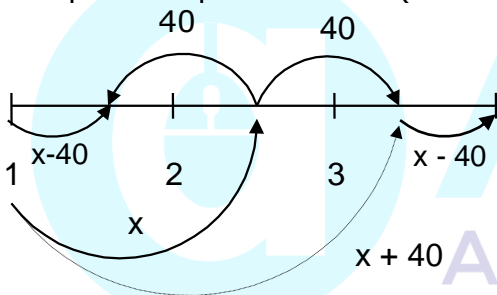
Resolución

De acuerdo a la información, el intervalo a considerar es entre la 1 y las 4; por lo tanto:



Consideramos tiempo transcurrido a partir de 1 pm : "x" min

Dentro de 40 min: $x + 40$
 Desde la 1 hasta hace 40 min: $x - 40$
 \Rightarrow lo que falta para las 4 es $(x - 40)$



Planteando la ecuación, tenemos:
 $(x + 40) + (x - 40) = 3h \Leftrightarrow 180 \text{ min}$
 $x + 40 + x - 40 = 180$
 $x = 90 \text{ min}$

Significa que desde la 1 pm han transcurrido 90 min \Leftrightarrow 1 h 30 min

\therefore Serán las **2:30 pm**

2. PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS.

Para desarrollar estos problemas, se puede aplicar criterios lógicos y regla de tres; teniendo en cuenta lo siguiente:

- Hora marcada (hora falsa)
- Hora correcta (hora real)

Mediante las siguientes expresiones:

$$HM = HR - \text{Atraso}$$

$$HM = HR + \text{Adelanto}$$

Ejemplo 4:

Un reloj se adelanta 2 min cada 15 min. Si esta desperfecto ocurre ya hace 7 horas, que hora marcará las agujas de tal reloj si la hora exacta es 3h 58 min.

Resolución

Aplicando "regla de tres simple"
 Si se adelanta 2 min en 15 min; en 7 horas ($7 \times 60 = 420 \text{ min}$), ¿Cuánto se habrá adelantado?

Se adelanta 2 min _____ 15 min
 X _____ 420 min

$$X = \frac{2 \times 420}{15} = 56 \text{ min}$$

\Rightarrow La hora marcada, aplicando
 $HM = HR + \text{Adelanto}$; será:
 $HM = 3 \text{ h } 58 \text{ min} + 56 \text{ min}$

$HM = 4 \text{ h } 54 \text{ min}$

Ejemplo 5:

Hace 10 horas que un reloj se atrasa 3 min cada media hora. ¿Cuál es la hora exacta si el reloj indica que son las 11 h 28 min?

Resolución

Aplicando "Regla de Tres Simple":

Se atrasa 3 min _____ 1/2 hora
 X _____ 10 horas

$$X = \frac{3 \cdot 10}{1/2} = 60 \text{ min} = 1 \text{ hora}$$

\Rightarrow hora exacta (hora real), aplicando
 $HR = HM + \text{atraso}$; será
 $HR = 11 \text{ h } 28 \text{ min} + 1 \text{ h}$
 $HR = 12 \text{ h } 28 \text{ min}$

Ejemplo 6

Un reloj se adelanta 5 min cada 18 horas a partir de las 8 am. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que vuelva a dar la hora correcta?

Resolución

Para resolver este problema debemos tener presente que: **para que un reloj vuelva a marcar la hora correcta deberá adelantarse (atrasarse) en total 12 horas (720 min).**

Entonces, resolviendo por "Regla de Tres Simple", tenemos:

Se adelanta 5 min _____ 18 h
 720 min _____ x

$$x = \frac{720 \times 18}{5} = 144 \times 18 \text{ horas}$$

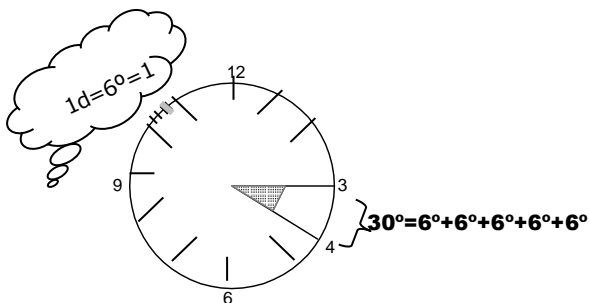
Qué en días será: $\frac{144 \times 18}{24} = 108$

3. ESTUDIO DEL RELOJ Y SUS MANECILLAS

Equivalencia entre espacio, ángulo y tiempo (1 vuelta)

Espacio (div.)	Ángulo	Tiempo (min.)
60	360°	60
30	180°	30
15	90°	15
5	30°	5

1 div \diamond 6° \diamond 1min



Relación entre el espacio recorrido por la manecilla del horario y minuterero (en 1 hora)

El minuterero recorre 60 divisiones en el mismo tiempo que el horario recorre 5 divisiones, por lo tanto se puede escribir una relación:

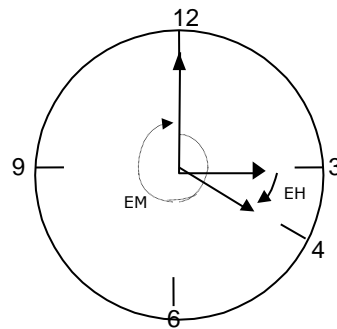
$\frac{EH}{EM} = \frac{5 \text{ div.}}{60 \text{ div.}}$

→

$\frac{EH}{EM} = \frac{1}{12} = \frac{x}{12x}$

EH = Espacio recorrido por el horario
 EM = Espacio recorrido por el minuterero (en 1 hora)

Ejemplo: Desde las 3 en punto hasta las 4 en punto



También:

En 60 min el horario avanza $\left(\frac{60}{2}\right) = 30^\circ$

∴ En M min el horario avanza $\left(\frac{M}{2}\right)^\circ$

Ángulo que forman las manecillas del reloj (Horario–Minuterero):

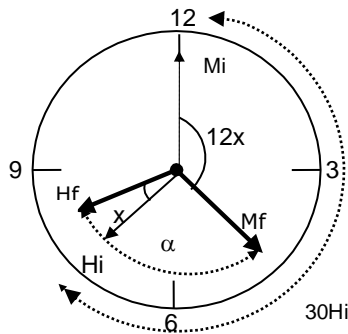
Cuando el reloj marca las "H" horas "M" minutos o abreviadamente H:M el ángulo "α" formado por el horario y el minuterero se obtiene directamente con la siguiente fórmula:

$\alpha = \mp 30H \pm \frac{11}{2}M$

Donde:

- H → hora de referencia (0 ≤ H ≤ 12)
- M → # de minutos transcurridos a partir de la hora de referencia
- α → Medida del ángulo que forman las manecillas del reloj (en grados sexagesimales)

Caso I: Cuando el horario adelanta al minuterero.



Para las H horas y M minutos, de la figura se observa que:

$$12x + \alpha = 30H + x$$



Última hora pasada por el horario

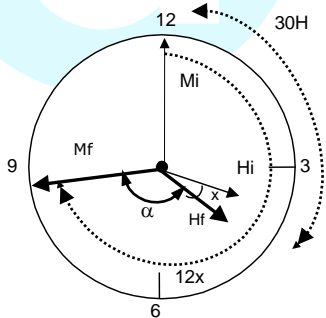
Transponiendo términos, obtenemos:

$$\alpha = 30H - 11x$$

Teniendo en cuenta que x° es lo que avanza el horario en M minutos, entonces:

$$\alpha = 30H - 11 \left(\frac{M}{2} \right)$$

Caso II: Cuando el minuterero adelanta al horario



Para las H horas y M minutos, de la figura se observa que:

$$30H + x + \alpha = 12x$$

$$\alpha = 11x - 30H$$

$$\alpha = 11 \left(\frac{M}{2} \right) - 30H$$

Conclusión: El signo negativo acompañará a la manecilla que se encuentra rezagada y el positivo al que se encuentra adelantada (tomando en cuenta siempre el movimiento de las manecillas del reloj).

Notas:

- Dado un tiempo determinado la hora referencial será la hora exacta anterior a la hora que nos dan.
- Cuando se pregunta por el ángulo que forman las manecillas del reloj; se entiende que es por el menor ángulo.

Ejemplo 7:

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj en cada caso?

- 4h 40 min
- 8h 25 min
- 12 h 36 min

Resolución

Para estos casos, aplicamos la expresión general:

$$\alpha = \pm 30H \mp \frac{11}{2}M$$

Sin necesidad de emplear los signos; ya que el ángulo debe ser positivo.

a) $\alpha = 30(4) - \frac{11}{2}(40)$

$$\alpha = -120 + 220$$

$$\alpha = 100^\circ$$

b) $\alpha = 30(8) - \frac{11}{2}(25)$

$$\alpha = 240 - \frac{275}{2}$$

$$\alpha = \frac{480 - 275}{2} = \frac{205}{2}$$

$$\alpha = 102^\circ 30'$$

- c) Cuando son las 12h, en la expresión, H se reemplaza por 0 (cero)

$$\alpha = 30(0) - \frac{11}{2}(36)$$

$$\alpha = 0 + 198^\circ$$

Como debe considerarse el menor ángulo

$$\Rightarrow \alpha' = 360 - 198$$

$$\alpha' = 162^\circ$$

Ejemplo 8

Indicar cuántos minutos después de la 1 forman ángulo recto las manecillas de un reloj.

Resolución

Empleando la expresión:

$$\alpha = \pm H \mp \frac{11}{2}M$$

y reemplazando los datos tendremos 2 situaciones: (en ambos casos el Minutero adelanta al Horario; es decir, el H esta rezagado, por lo que a esta manecilla le asignaremos signo negativo).

I) Cuando el menor ángulo es 90°

$$90 = -30(1) + \frac{11}{2} M$$

$$90 = -30 + \frac{11}{2} M$$

$$\Rightarrow M = \frac{240}{11} = 21 \frac{9}{11} \text{ min}$$

II) Cuando el ángulo sea 270° (mayor ángulo)

$$270 = -30(1) + \frac{11}{2} M$$

$$300 = \frac{11}{2} M$$

$$\Rightarrow M = \frac{600}{11} = 54 \frac{6}{11} \text{ min}$$

Habrán dos situaciones entre la 1 y las 2 en que las agujas del reloj formarán ángulo recto.

Por primera vez a la 1 con $21 \frac{9}{11}$; y

Por segunda vez a la 1 con $54 \frac{6}{11}$

Ejemplo 9

A que hora entre las 8 y las 9 el menor ángulo formado por las manecillas del reloj es la quinta parte del mayor ángulo?

Resolución

Los dos ángulos (menor y mayor) suman 360°

$$\text{Mayor} + \text{Menor} = 360^\circ$$

$$5x + x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

Este ángulo lo formaron cuando eran las 8h M min.

Para calcular "M" aplicamos:

$$\alpha = 30 H \quad \frac{11}{2} M$$

$$60 = 30(8) \quad \frac{11}{2} M$$

Considerando signos, puede darse dos situaciones:

I) $60 = -240 + \frac{11}{2} M$

$$300 = \frac{11}{2} M$$

$$M = \frac{600}{11} = 54 \frac{6}{11}$$

II) $60 = 240 - \frac{11}{2} M$

$$\frac{11}{2} M = 180$$

$$M = \frac{360}{11} = 32 \frac{8}{11}$$

La hora en que formarán 60° las manecillas será por primera vez a las $8h 32 \frac{8}{11}$ min y por segunda

vez a las $8h 54 \frac{6}{11}$ min.

4. PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

El tiempo que se mide al tocar una cantidad "n" de campanadas siempre es a partir de una que "marca al poro"; es decir que lo medimos por intervalos.

Gráficamente:



i = tiempo que demora cada intervalo

Ejemplo 10:

Un reloj señala la hora con igual número de campanas. Para indicar las 6 am. demoró 15 seg. ¿Cuánto demorará para indicar las 9 am?

Resolución

La solución a este tipo de problemas se hace aplicando "regla de tres simple", tomando en cuenta los intervalos y generados entre campanada y campanada.

Es decir:

$$6 \text{ am} \diamond 6 \text{ camp} \rightarrow 5 \text{ int} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 15 \text{ seg}$$

$$9 \text{ am} \diamond 9 \text{ camp} \rightarrow 8 \text{ int} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x$$

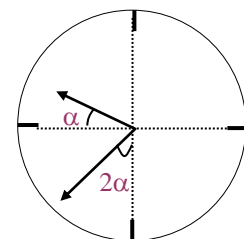
$$x = \frac{8 \cdot 15}{5} = 24 \text{ seg.}$$

\Rightarrow se demorará 24 segundos

EJERCICIOS

1. Un campanario tarda 4s en tocar 5 campanadas. ¿Cuánto tardará en tocar 10 campanadas?
Rpta.:.....
2. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 am demora 8 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12 m.?
Rpta.:.....
3. El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 38 segundos, si se escuchan tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada. ¿Cuánto tiempo empleará este campanario para tocar 7 campanadas?
Rpta.:.....
4. Nací en 1972, cuando la cuarta parte de la diferencia entre el número de días que faltaban transcurrir y el número de días transcurridos era igual al número de días transcurridos. ¿ Qué día nací?
Rpta.:.....
5. Son más de las seis sin ser las ocho de esta mañana. Hace diez minutos los minutos que habían transcurrido desde las 6 eran iguales a $\frac{1}{9}$ del tiempo que faltarían transcurrir hasta las ocho dentro de diez minutos. ¿Qué hora es?
Rpta.:.....
6. Son más de las 7 pero menos de las 8 de la mañana. Dentro de 30 minutos faltarán para las 9 el mismo tiempo que paso desde las 6 hasta hace 20 minutos ¿Qué hora es?
Rpta.:.....

7. Un reloj se adelanta 8 minutos cada 5 horas. Si se sincroniza con reloj en buen estado a las 3:30 a.m., ¿qué hora marcará el reloj cuando transcurran 25 horas?
Rpta.:.....
8. Cierta día un reloj se empezó a atrasar 10 minutos cada hora, a partir de las 8:00 a.m. ¿ Qué hora marcó el reloj a las 2:00 p.m. del mismo día?
Rpta.:.....
9. Un reloj se atrasa 2 horas cada día. ¿Cuál debe ser el menor número de días que debe transcurrir para que marque la hora exacta?
Rpta.:.....
10. Un reloj se adelanta y se calcula que deben transcurrir 60 días para que dé la hora exacta. ¿Cuánto se adelanta el reloj cada día?
Rpta.:.....
11. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj en cada uno de los siguientes casos:
a) 6h 10min b) 4h 12 min
c) 14h 24 min d) 9h 35 min
12. ¿Qué hora indica el reloj en la siguiente figura?



Rpta.:.....

HABILIDAD OPERATIVA

CONCEPTO:

En este capítulo se proporciona al estudiante una técnica que le permita efectuar operaciones aritméticas con mayor rapidez que lo común, para lo cual se ha recopilado una serie de situaciones en las que hay que operar con números enteros, con números decimales, con expresiones algebraicas; abarcando además de las cuatro operaciones fundamentales, la potenciación y la radicación. Queda sobreentendido el conocimiento básico de dichas operaciones.

CALCULO RÁPIDO CON ENTEROS

Ejm. 1:

Si se sabe que:

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 19958400$$

¿Cuál es el valor de:

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 ?$$

Solución:

No se trata de multiplicar todos los números, sólo hay que notar entre otras cosas, que el primer producto tiene el factor 12, el cual no aparece en el Segundo Grupo y este tiene el factor 4 en lugar de 12.

Podemos decir que como 4 es la tercera parte de 12, el producto que se está buscando es la tercera parte del primero.

$$\begin{aligned} \therefore 4 \times 5 \times \dots \times 10 \times 11 &= 19958400 \div 3 \\ &= \mathbf{6652800} \end{aligned}$$

Ejm. 2:

¿Cuánto se obtiene al efectuar esta operación?

$$123 \times 366 + 177 \times 134 + 123 \times 134 + 177 \times 366$$

Solución:

Agrupando el primer y el tercer producto se obtiene:

$$123 \times (366 + 134) = 123 \times 500$$

Agrupando ahora el segundo y el cuarto producto se obtiene:

$$177 \times (134 + 366) = 177 \times 500$$

Procedemos igual con los productos obtenidos:

$$\begin{aligned} 123 \times 500 + 177 \times 500 &= (123 + 177) \times 500 \\ &= 300 \times 500 \\ &= \mathbf{150000} \end{aligned}$$

II. OPERACIONES Y TÉCNICAS ALGEBRAICAS

Ejm. 3:

El número $N = 2^{48} - 1$, es exactamente divisible por dos números que están comprendidos entre 60 y 70. ¿Cuál es la suma de estos números?

Solución:

Del álgebra elemental sabemos que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ y al aplicar transformaciones sucesivas de este tipo al número N tendremos:

$$\begin{aligned} N &= 2^{48} - 1 = (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) \\ &= (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ N &= (63)(65)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \end{aligned}$$

De este resultado vemos que N es divisible por 63 y 65, los cuales se encuentran comprendidos entre 60 y 70, y que nos piden sumar.

$$\text{Luego: } \mathbf{63 + 65 = 128}$$

Ejm. 4:

Hallar la raíz cuadrada de: x:

$$X = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 - 2(\sqrt{3+2\sqrt{2}}) \\
 &\quad (\sqrt{3-2\sqrt{2}}) + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2 \\
 &= 3+2\sqrt{2} - 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + 3- 2\sqrt{2} \\
 &= 6 - 2\sqrt{9-8} = 4 \\
 x^2 = 4 &\Rightarrow x = 2 \therefore \sqrt{x} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

III. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Tenemos que observar los casos en las cuales una ley de formación se cumple.

CASO III.1

Cuando elevamos al cuadrado un numeral formado únicamente por cifras 3,6 ó 9.

2 cifras $\rightarrow (33)^2 = 1089$
 \rightarrow Suma de cifras = 18 = **9 (2)**

3 cifras $\rightarrow (333)^2 = 110889$
 \rightarrow Suma de cifras = 27 = **9 (3)**

4 cifras $\rightarrow (3333)^2 = 11108889$
 \rightarrow Suma de cifras = 36 = **9 (4)**

5 cifras $\rightarrow (33333)^2 = 1111088889$
 \rightarrow Suma de cifras = 45 = **9 (5)**

⋮
 ⋮

n cifras $\rightarrow (3\dots33)^2 = \underbrace{11\dots11088\dots889}_{\substack{(n-1) \\ \text{cifras}}} \underbrace{\dots}_{\substack{(n-1) \\ \text{cifras}}}$

\Rightarrow Suma de cifras = **9 n**

2 cifras $\rightarrow (66)^2 = 4356$
 \rightarrow Suma de cifras = 18 = **9 (2)**

3 cifras $\rightarrow (666)^2 = 443556$
 \rightarrow Suma de cifras = 27 = **9 (3)**

4 cifras $\rightarrow (6666)^2 = 44435556$
 \rightarrow Suma de cifras = 36 = **9 (4)**

5 cifras $\rightarrow (66666)^2 = 4444355556$
 \rightarrow Suma de cifras = 45 = **9 (5)**

⋮
 n cifras $\rightarrow (66\dots66)^2 = 44\dots44355\dots556$

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{(n-1) \text{ cifras}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{(n-1) \text{ cifras}}$

\Rightarrow Suma de cifras = **9 n**

2 cifras $\rightarrow (99)^2 = 9801$
 \rightarrow Suma de cifras = 18 = 9 (2)

3 cifras $\rightarrow (999)^2 = 998001$
 \rightarrow Suma de cifras = 27 = 9 (3)

4 cifras $\rightarrow (9999)^2 = 99980001$
 \rightarrow Suma de cifras = 36 = 9 (4)

5 cifras $\rightarrow (99999)^2 = 9999800001$
 \rightarrow Suma de cifras = 45 = 9 (5)

⋮

n cifras $\rightarrow (99\dots99)^2 = 99\dots99800\dots001$

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{(n-1) \text{ cifras}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{(n-1) \text{ cifras}}$

\Rightarrow Suma de cifras = **9 n**

En general observamos que al elevar al cuadrado un número formado por cifras 3,6 ó 9, siempre en el resultado se observará que:

Suma de cifras = 9n
 Número de cifras = 2n

Donde "n" es igual al número de cifras al número de cifras del número que vamos a elevar al cuadrado.

Ejm. 5:

Hallar la suma de cifras de "W" si:

$W = (\underbrace{1077\dots777}_{79 \text{ cifras}} - \underbrace{77\dots778}_{77 \text{ cifras}})^2$

Solución:

Observaremos que como el sustraendo tiene 2 cifras menos que el minuendo estará dos lugares a la derecha de éste.

$$\begin{array}{r}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{79 \text{ cifras}} \\
 1077\dots777- \\
 \underline{77\dots778} \\
 999\dots999 \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{78 \text{ cifras}} \\
 W = (\underbrace{99\dots99}_{78 \text{ cifras}})^2 \quad ; \quad n = 78
 \end{array}$$

⇒ Suma de cifras = **9(78) = 702**

CASO III.2

Cuando tengamos un numeral formado únicamente por cifras 1:

2 cifras → $(11)^2 = 121$
 → Suma de cifras = 4 = **2²**

3 cifras → $(111)^2 = 12321$
 → Suma de cifras = 9 = **3²**

4 cifras → $(1111)^2 = 1234321$
 → Suma de cifras = 16 = **4²**

5 cifras → $(11111)^2 = 123454321$
 → Suma de cifras = 25 = **5²**

⋮
 ⋮

n cifras → $(111\dots11)^2 = 12\dots n\dots 21$

⇒ Suma de cifras = **n²** ; n < 10

“n” tiene que ser como máximo “9” puesto que es el mayor valor que puede tomar una cifra. Además los números que se forman son números capicúas; es decir números en las cuales las cifras que equidistan de los extremos son iguales y por lo tanto se pueden leer indistintamente de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.

Ejm. 6:

Hallar el valor de “W” si:

$$W = \sqrt{10305050301 + 2040604020}$$

Solución:

Operando primero la cantidad subradical:

$$\begin{array}{r}
 10305050301+ \\
 \underline{2040604020} \\
 12345654321
 \end{array}$$

Observamos que este número es el desarrollo de:

$$12345654321 = (111111)^2$$

$$W = \sqrt{(111111)^2} = \mathbf{111111}$$

CASO III.3

Veamos que sucede con un número que termina en cifra 5 cuando se eleva al cuadrado:

$$(15)^2 = 225 = \overbrace{2}^{1 \times 2} 25$$

$$(25)^2 = 625 = \overbrace{6}^{2 \times 3} 25$$

$$(35)^2 = 1225 = \overbrace{12}^{3 \times 4} 25$$

:

$$(85)^2 = 7225 = \overbrace{72}^{8 \times 9} 25$$

:

$$(115)^2 = 13225 = \overbrace{132}^{11 \times 12} 25$$

En general veremos que todo número que termina en cifra 5 al elevarse al cuadrado va a terminar en 25 y las otras cifras serán igual al producto de las cifras que no son 5 por el número consecutivo:

$$\left(\overline{\quad}5\right)^2 = \overbrace{\dots\dots\dots}^{n(n+1)} 25$$

Ejm. 7:

Hallar "m+n" si:

$$(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots)^2 = \dots mn$$

Solución:

Observaremos que lo que esta elevado al cuadrado es un número formado por factores impares, siendo uno de los factores el número 5. Además recordemos que:

Par x N = Par

Sin importar si N es par o impar

Impar x Impar = Impar

También sabemos que al multiplicar un número por otro que termina en cifra 5 se observa:

Par x (...5) = ...0

Impar x (...5) = ...5

Entonces:

$$(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots)^2 = (\dots 5)^2 = \dots 25 = \dots mn$$

Por lo tanto : $m = 2$; $n = 5$
 $\Rightarrow m + n = 7$

CASO III.4

Ahora veamos que sucede cuando multiplicamos 4 números consecutivos y le agregamos la unidad.

Por ejemplo:

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4} + 1 = 25$$

$$(1 \times 4 + 1)^2 = 5^2 = 25$$

$$\underbrace{2 \times 3 \times 4 \times 5} + 1 = 121$$

$$(2 \times 5 + 1)^2 = 11^2 = 121$$

$$\underbrace{3 \times 4 \times 5 \times 6} + 1 = 361$$

$$(3 \times 6 + 1)^2 = 19^2 = 361$$

En general diremos que si operamos:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = [n(n+3)+1]^2$$

Ejm. 8:

Hallar la suma de cifras de "M" si:

$$M = \sqrt{100 \times 101 \times 102 \times 103 + 1}$$

Solución:

Operando:

$$M = \sqrt{(100 \times 103 + 1)^2}$$

$$M = 10300 + 1 = 10301$$

Suma de cifras de M es:

$$1 + 0 + 3 + 0 + 1 = 5$$

CASO III.5

También tenemos el caso del producto de dos números formados por la misma cantidad de cifras 9 y las cifras de las unidades suman 10.

$$\underbrace{(99\dots 99a)}_{\text{"n" cifras}} \underbrace{(99\dots 99b)}_{\text{"n" cifras}} = \underbrace{(99\dots 900\dots 0)}_{\substack{\text{(n-1) cifras} \\ \text{(n-1) cifras} \\ \text{2 cifras}}} a \times b$$

Además $a + b = 10$

Ejm. 9:

Hallar el resultado de "P" si:

$$P = (999997) (999993)$$

Solución:

$$P = \underbrace{(999997)}_{\text{Suman 10}} \underbrace{(999993)}_{\text{Iguales}} = \mathbf{999990000021}$$

Iguales cantidad de cifras "9"

IV. CIFRAS TERMINALES

Se llama así a la cifra de las unidades, después de efectuar diferentes operaciones, lo cual sólo se realiza con las cifras de las unidades.

Ejm. 10:

Hallar la cifra de las unidades al efectuar:

a. $(21438) + (43156) - (3142)$
 $= (...8) + (...6) - (...2) = ...2$

b. $(31437) (83473) (21319) =$
 $\underbrace{(...7) (...3) (...9)}_{(...1) (...9)} = ...9$

c. $(43173)^3 = (...3)^3$
 $\underbrace{(...3) (...3) (...3)}_{(...9) (...3)} = ...7$

En la división, ni en la radicación se puede determinar la cifra terminal; pero en la potenciación vamos a observar que:

* Cuando elevamos a cualquier potencia un número que termina en 0, 1, 5 ó 6, el resultado terminará en la misma cifra:

$(...0)^n = ...0$
 $(...1)^n = ...1$
 $(...5)^n = ...5$
 $(...6)^n = ...6$

Ejm. 11:

Hallar la cifra terminal de:

$P = \left(\overline{\text{RAZONAMIENTO19} + \overline{\text{MATEMATICO 99} - 12} \right)^{\overline{\text{LO.MAXIMO}}}$

Solución:

Operando las cifras terminales:

$P = [(...9) + (...9) - (...2)]^{\overline{\text{LO.MAXIMO}}}$
 $P = [...6]^{\overline{\text{LO.MAXIMO}}}$

Un número que termina en 6 al elevarse a cualquier potencia termina en 6, por lo tanto:

$P = [...6]^{\overline{\text{LO.MAXIMO}}} = \mathbf{6}$

* También observaremos que sucede cuando el número termina en cifra 4 ó 9 y lo elevamos a cualquier potencia:

$(...4)^2 = (...4)(...4) = ...6$
 $(...4)^3 = (...4)(...4)(...4) = ...4$
 $(...4)^4 = (...4)(...4)(...4)(...4) = ...6$
 $(...4)^5 = (...4)(...4)(...4)(...4)(...4) = ...4$

Por inducción vemos que cuando:

$(...4)^n \begin{cases} \text{Si, n es impar} & \Rightarrow ...4 \\ \text{Si, n es par} & \Rightarrow ...6 \end{cases}$

Ahora veremos cuándo termina en 9:

$(...9)^2 = (...9)(...9) = ...1$
 $(...9)^3 = (...9)(...9)(...9) = ...9$
 $(...9)^4 = (...9)(...9)(...9)(...9) = ...1$
 $(...9)^5 = (...9)(...9)(...9)(...9)(...9) = ...9$

Por inducción vemos que cuando:

$(...9)^n \begin{cases} \text{Si, n es impar} & \Rightarrow ...9 \\ \text{Si, n es par} & \Rightarrow ...1 \end{cases}$

Ejm. 12:

Hallar la cifra terminal de:

$A = (21474)^{1217} + (32879)^{3146}$

Solución:

$(21474)^{1217} = (...4)^{\text{IMPAR}} = ...4$
 $(32879)^{3146} = (...9)^{\text{PAR}} = ...1$

Entonces: $A = (...4) + (...1) = ...5$

* Pero también tenemos que un número puede terminar en 2,3,7 ú 8. En esos casos dividiremos el exponente entre 4 y si el residuo es 1,2 ó 3 la cifra terminal de la base se multiplica dicha cantidad de veces; pero si la división es exacta entonces la cifra terminal se multiplica por si misma 4 veces.

Observación

Sólo es necesario dividir las 2 últimas cifras del exponente.

Ejm. 13:

Hallar la cifra terminal de:

$A = (2143)^{4375}$

$B = (3148)^{7473}$

$C = (31427)^{2148}$

$D = (21422)^{4314}$

Solución:

* $A = (2143)^{4375} = (...3)^{75}$

Dividiendo:

$$\begin{array}{r} 75 \\ 35 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 18 \end{array} \right.$$

③ ← residuo ⇒ la cifra terminal (...3) se repite 3 veces

$A = \underbrace{(...3) (...3) (...3)}_{3 \text{ veces}} = \dots 7$

* $B = (3148)^{7473} = (...8)^{73}$

Dividiendo:

$$\begin{array}{r} 73 \\ 33 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 18 \end{array} \right.$$

① ← residuo ⇒ la cifra terminal (...8) se repite 1 vez

$B = \underbrace{(...8)}_{1 \text{ vez}} = \dots 8$

* $C = (31427)^{2148} = (...7)^{48}$

Dividiendo:

$$\begin{array}{r} 48 \\ -8 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 12 \end{array} \right.$$

① ← residuo ⇒ la cifra terminal (...7) se repite 4 veces

$C = (...7) (...7) (...7) (...7) = \dots 1$

* $D = (21422)^{4314} = (...2)^{14}$

Dividiendo:

$$\begin{array}{r} 14 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array} \right.$$

② ← residuo ⇒ la cifra terminal (...2) se repite 2 veces

$D = (...2) (...2) = \dots 4$

PROBLEMAS PARA DESARROLLAR EN CLASE

01. Hallar la suma de las cifras del resultado:

$A = \sqrt{(10000)(10001)(10002)(10003) + 1}$

Rpta.

02. Hallar la suma de las cifras al resolver:

$B = (\underbrace{111 \dots 1}_{9 \text{ cifras}})^2$

Rpta.

03. Hallar la suma de las cifras del resultado:

$C = (\underbrace{6666 \dots 6}_{(n-1) \text{ cifras}})^2$

Rpta.

04. Hallar la suma de las cifras al resolver:

$$D = 99995^2 + 999995^2 + 9999995^2$$

Rpta.

05. Resolver:

$$E = \sqrt[16]{(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 257) + 1}$$

Rpta.

06. Hallar la suma de las cifras del resultado:

$$F = \underbrace{555 \dots 5}_{40 \text{ cifras}} \times \underbrace{999 \dots 9}_{40 \text{ cifras}}$$

Rpta.

07. Hallar la suma de las cifras del resultado:

$$G = \underbrace{727272 \dots 72}_{100 \text{ cifras}} \times \underbrace{999 \dots 9}_{150 \text{ cifras}}$$

Rpta.

08. Hallar la cifra terminal al desarrollar:

$$H = (2+1)(2^2+1)(2^3+1)\dots(2^{700}+1)$$

Rpta.

09. Si:

$$\underbrace{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}_{abc \text{ factores}} = \sqrt{\dots ab}$$

Hallar: "a x b"

Rpta.

10. Si:

$$(\overline{ab5})^2 + (\overline{cd5})^4 + (\overline{ef5})^6 = \dots \overline{MP}$$

Hallar: (M+P)

Rpta.

11. Calcular:

$$E = 4 - 4 + 4 - 4 + \dots \infty$$

Rpta.

12. Hallar la cifra terminal al desarrollar:

$$E = \frac{2^{27}}{2^{18}}$$

Rpta.

13. Si: $\overline{abcd} \times 9999999 = \dots 3518$

Calcular: a+b+c+d

Rpta.

14. Hallar la suma de las cifras al resolver:

$$E = 9999999998 \times 9999999992$$

Rpta.

15. Hallar "x", si

$$(4747)^{278} \cdot (12389)^{6001} + (888)^{243} - (256)^{199} = \dots x$$

Rpta.

16. Hallar:

$$\overline{TOC} + \overline{TOC} + \overline{ENTRE}, \quad \text{Si:}$$

$$\overline{TOC} \times \overline{TOC} = \overline{ENTRE}$$

En el cual 0 = cero y letras

diferentes, tienen valores

diferentes

Rpta.

17. Si: $999999 \times 5678 = \overline{\hspace{2cm}} abcd$

Hallar: $a + b + c + d$

Rpta.

18. Si: $(a+b+c)^2 = 441$

Hallar: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

Rpta.

19. Hallar la suma de las cifras de "R"

$$R = (10^{30} + 1)(10^{30} - 1)$$

Rpta.

20. Siendo a, b y c cifras; hallar "b+c"

si:

$$(a+b+c)^2 = \overline{a25}$$

Rpta.

FRACCIONES

CONCEPTO:

Se denomina fracción a una o varias partes que se toma de la unidad dividida.

Todo $\langle \rangle$ UNIDAD

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

$\frac{5}{6}$ → Numerador
6 → Denominador

CLASES DE FRACCIONES

FRACCIÓN PROPIA:

Si el numerador es menor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{21}{49}$; etc.

en general: $\frac{a}{b} < 1 \rightarrow a < b$

FRACCIÓN IMPROPIA:

Si el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{7}{3}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{18}{7}$.

En general: $\frac{a}{b} > 1 \rightarrow a > b$

Nota: Toda fracción impropia origina una fracción mixta.

$\frac{7}{3} \rightarrow 2\frac{1}{3}$; $\frac{9}{5} \rightarrow 1\frac{4}{5}$

FRACCIONES HOMOGÉNEAS:

Dos o más fracciones son homogéneas si presentan el mismo denominador:

Ejemplos: $\frac{8}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{11}{7}$

en general: $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{b}$; $\frac{c}{b}$;.....

FRACCIONES HETEROGÉNEAS:

Dos o más fracciones son heterogéneas si presentan denominadores diferentes.

Ejemplos: $\frac{5}{8}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{12}{13}$

en general $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $b \neq d \neq f$

FRACCIONES ORDINARIAS:

Son aquellas cuyo denominador es diferente a una potencia de 10:

Ejemplos: $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$

en general: $\frac{a}{b}$; $b \neq 10^n$; $n \in \mathbb{N}$

FRACCIONES DECIMALES

Son aquellas cuyo denominador es una potencia de 10:

Ejemplos: $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{11}{10000}$

FRACCIONES IRREDUCTIBLES:

Son aquellos cuyos términos (numerador y denominador) son números primos entre sí o sea no tienen divisores comunes. (lo que queremos decir son fracciones que no se pueden simplificar).

Ejemplos: $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{15}{26}$; $\frac{17}{23}$

FRACCIONES REDUCTIBLES:

Son aquellas cuyos términos (numerador y denominador) no son primos entre sí o sea tienen divisores comunes (se pueden simplificar).

Ejemplos: $\frac{9}{12}$; $\frac{21}{49}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{10}{100}$

FRACCIONES EQUIVALENTES:

Una fracción es equivalente a otra cuando tiene el mismo valor, pero sus términos son diferentes.

Ejemplos: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$; $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$

En general:

$\frac{a}{b}$ es equivalente $\frac{ak}{bk}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

1º Propiedad: Si dos fracciones tienen igual denominador, es mayor que el que tiene mayor numerador.

Ejm: $\frac{11}{4} > \frac{7}{4}$

2º Propiedad: Si dos fracciones tienen igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador:

Ejm: $\frac{7}{12} > \frac{7}{15}$

3º Propiedad: Si a los términos de una fracción propia se le suma o se le resta un mismo número, la fracción aumenta o disminuye respectivamente.

Ejm: $\frac{6}{11} \rightarrow \frac{6+5}{11+5} = \frac{11}{16} \Rightarrow \frac{11}{16} > \frac{6}{11}$
 $\frac{6}{11} \rightarrow \frac{6-2}{11-2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} < \frac{6}{11}$

4º Propiedad: Si a los términos de una fracción impropia, se le suma o se le resta un mismo número la fracción disminuye o aumenta respectivamente.

Ejm: $\frac{11}{6} \rightarrow \frac{11+3}{6+3} = \frac{14}{9} \Rightarrow \frac{14}{9} < \frac{11}{6}$
 $\frac{11}{6} \rightarrow \frac{11-3}{6-3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} > \frac{11}{6}$

5º Propiedad: Si el numerador de una fracción se le multiplica o divide por un número sin variar el denominador, la fracción queda

multiplicada o dividida por dicho número, respectivamente.

6º Propiedad, Si al denominador de una fracción se le multiplica o divide por un número sin variar el numerador, entonces la fracción queda dividida o multiplicada por dicho número, respectivamente.

7º Propiedad: Si se multiplica o divide por un mismo número los dos términos de una fracción, no se altera el valor de la fracción.

NÚMERO DECIMAL

Es la representación de una fracción en su forma lineal, la cual contiene dos partes, una parte entera y una parte decimal.

Ejemplos : $\frac{15}{26} = 0,576923$
 $\frac{27}{18} = 2,076923$
 $\frac{4}{5} = 0,8$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

EXACTOS O LIMITADOS

Cuando el número de la parte decimal tiene cifras limitadas

$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
 $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

INEXACTOS O ILIMITADOS

Cuando el número de la parte decimal tiene cifras ilimitadas.

a) **Periódicos puros**

$0,aaa \dots\dots\dots = 0, \widehat{a} = \frac{a}{9}$

0, abab..... = 0, $\widehat{ab} = \frac{\overline{ab}}{99}$

0,555..... =

0,2727..... =

b) **Periódicos mixtos**

0, abbb..... = 0, $\widehat{ab} = \frac{\overline{ab - a}}{90}$

0, abcabc..... = 0, $\widehat{abc} = \frac{\overline{abc - a}}{990}$

0,24111..... =

0.7333..... =

0,9111..... =

0,0111..... =

a, bccc..... = a, $\widehat{bc} = a+0, \widehat{bc}$

2,4666..... =

11,3222..... =

Ejm. 1:

Hallar una fracción equivalente a 4/5, si la suma de sus términos es 117.

Sol.

$$\frac{4}{5} \Rightarrow 4k + 5k = 117$$

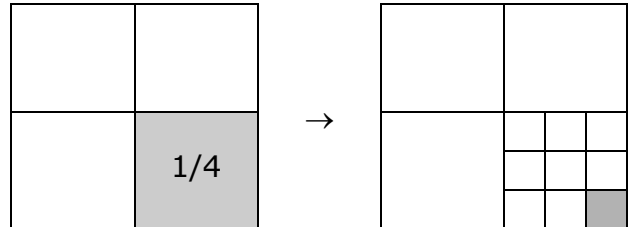
$$k = 13$$

$$f = \frac{4.13}{5.13} \quad \therefore \frac{52}{65}$$

FRACCIÓN DE FRACCIÓN

Se denomina así a las partes que se consideran de una fracción que se ha dividido en partes iguales. Así por ejemplo: $\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{4}$ indica que la fracción

$\frac{1}{4}$ se ha dividido en 9 partes iguales, de los que se ha tomado 1



$\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{4}$

Ejm. 2

Calcular los $\frac{3}{4}$ de las $\frac{3}{7}$ de los $\frac{2}{9}$ de 72

Solución:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{9} \times 72 = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 72}{4 \times 7 \times 9} = \frac{9 \times 8}{2 \times 7} = \frac{36}{7} = 5 \frac{1}{7}$$

FRACCION COMO RELACION "Parte - Todo"

f = $\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}}$ → es; son
→ de; del

Ejm. 3:

En una reunión asistieron 80 personas donde 30 eran varones en determinado momento 15 parejas están bailando.

i) ¿Qué parte de los reunidos son mujeres?

$$f = \frac{P}{T} = \frac{\text{Mujeres}}{\text{Todos}} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

ii) ¿Qué parte del número de hombres es el número de mujeres?

$$f = \frac{P}{T} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

iii) ¿Qué parte es el número de personas que bailan respecto al número de personas que no bailan?

$$f = \frac{P}{T} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

iv) ¿Qué parte de los hombres bailadores son los hombres no bailadores?

$$f = \frac{P}{T} = \frac{15}{15} = 1$$

v) ¿Qué parte respecto de las mujeres que no bailan son los varones que si bailan?

$$f = \frac{P}{T} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

*** Análisis de cuanto se saca (pierde) o agrega (gana) de una cantidad:**

Se saca o pierde	Queda	Agrego o gano	Resulta
Sus: $\frac{3}{4}$	$\rightarrow \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow \frac{3}{2}$
$\frac{2}{5}$	$\rightarrow \frac{3}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\rightarrow \frac{17}{9}$
$\frac{4}{15}$	$\rightarrow \frac{11}{15}$	$\frac{3}{7}$	$\rightarrow \frac{10}{7}$

Ejm: 4

Una persona tenía S/. 240 pierde y gana alternadamente en cinco juegos de azar: 1/3; 3/4; 2/7; 3/5; 7/8 ¿Cuánto dinero le quedó finalmente?

Resolución

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{7}\right) \left(1 + \frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{7}{8}\right) \cdot 240$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot 240 = 40$$

Ejm: 5

María va al mercado y gasta 2/5 de lo que no gasta; luego pierde 1/4 de lo que no pierde. Si al final le quedó S/.32. ¿Cuánto tenía inicialmente?

Resolución

$$\text{Gasta} = \frac{2}{5} \text{ (no gasta)}$$

$$\frac{\text{Gasta}}{\text{No Gasta}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Gasta : } 2x \\ \text{No Gasta: } 5x \end{cases} \begin{cases} \text{Pierde: } x \\ \text{No pierde: } 4x \end{cases}$$

$$\text{Si se quedó con S/.32} \Rightarrow 4x = 32$$

$$x = 8$$

$$\therefore \text{Tenía } 7x = 7(8) = 56$$

Ejm. 6

Diana va al mercado y gasta en carne 1/3 de lo que tiene; en cereales 1/4 de lo que le quedaba y 3/8 del resto en verduras. Si todavía le queda S/. 20. ¿Cuánto gastó?

Resolución

Suponemos que tiene "x" soles.
Gasta de la sgte. manera:

i) En carne: $\frac{1}{3}x$
entonces le queda $\frac{2}{3}x$

ii) En cereales: $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)$

le queda $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)$

iii) En verduras: $\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)$

le queda $\frac{5}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)$

Por dato:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x = 20$$

$$x = 64$$

$$\therefore \text{Gastó: } 64 - 20 = \text{S/. 44}$$

Ejm. 7:

Dos tercios de los profesores de un colegio son mujeres. Doce de los profesores varones son solteros, mientras que los 3/5 son casados. ¿Cuál es el número de profesores?

Resolución

$$\text{Prof.: } x \begin{cases} M : \frac{2}{3}x \\ V : \frac{1}{3}x \end{cases} \begin{cases} C : \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3}x \right) \\ S : \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3}x \right) \end{cases}$$

Dato: Profesores solteros: 12

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3}x \right) = 12 \quad \mathbf{x = 90}$$

Ejm. 8

Felipe entra a dos librerías en forma sucesiva; en la primera gasta 1/3 de lo que tenía más S/. 10 y en la segunda gasta 1/10 de lo que le queda más S/.10. si regresa a su casa con S/.53 ¿Cuál es la cantidad que tenía al inicio?.

Resolución

	Cantidad Inicial: x	
	Gasta	Queda
L ₁	$\frac{1}{3}x + 10$	$\frac{2}{3}x - 10$
L ₂	$\frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}x - 10 \right) + 10$	$\frac{9}{10} \left(\frac{2}{3}x - 10 \right) - 10$

Dato: Regresa a casa con S/. 53

$$\Rightarrow \frac{9}{10} \left(\frac{2}{3}x - 10 \right) - 10 = 53$$

$$\frac{9}{10} \left(\frac{2}{3}x - 10 \right) = 53$$

$$\frac{2}{3}x - 10 = 70$$

$$\therefore \mathbf{x = S/. 120}$$

Problemas sobre MEZCLAS

Ejm. 9:

Un depósito contiene 36 litros de leche y 18 litros de agua. Se extraen 15 litros de mezcla. ¿Cuántos litros de leche quedaron?

Resolución:

Mezcla Inicial:

$$54\ell \begin{cases} \text{Leche: } 36\ell \rightarrow f_{\ell} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \\ \text{Agua: } 18\ell \rightarrow f_a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Esto quiere decir que en cualquier parte de la mezcla las $\frac{2}{3}$ partes son de leche,

en tanto que la otra $\frac{1}{3}$ parte es de agua.

Al extraer 15ℓ de la mezcla, se extrae leche y agua:

$$15\ell \begin{cases} \text{Leche: } \frac{2}{3} (15) = 10 \\ \text{Agua: } \frac{1}{3} (15) = 5 \end{cases}$$

Quedando en el depósito:

$$36 - 10 = \mathbf{26\ell \text{ de leche}}$$

Ejm. 10

En un tonel hay 60 litros de vino A y 40 litros de vino B. Si cada litro de vino A cuesta S/. 10 y cada litro de vino B cuesta S/.5; ¿Cuánto cuesta 45 litros de la mezcla?

Resolución:

Mezcla Inicial

$$100\ell \begin{cases} V_A = 60\ell \rightarrow f_{VA} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \\ V_B = 40\ell \rightarrow f_{VB} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

⇓

$$45\ell \begin{cases} V_A = \frac{3}{5} (45) = 27\ell \\ V_B = \frac{2}{5} (45) = 18\ell \end{cases}$$

$$\therefore \text{Costo: } 27 \times S/.10 = S/. 270$$

$$18 \times S/. 5 = \underline{S/. 90}$$

$$\text{Total } S/. 360$$

REDUCCION A LA UNIDAD

Aplicable a problemas en los que intervienen grifos, llaves, obreros.

Ejm. 11

Un obrero puede realizar un trabajo en 20 horas, otro obrero lo puede hacer en 30 horas. Si trabajan los dos juntos, qué tiempo se tardarán en realizar dicho trabajo

Resolución

Tiempo que emplea c/u de los obreros:

$$t_1 = 20h$$

$$t_2 = 30h$$

Analizando el trabajo que hacen en una hora:

El 1º obrero hará $\frac{1}{20}$ de la obra.

El 2º obrero hará $\frac{1}{30}$ de la obra.

⇒ los dos juntos harán:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \text{ de la obra.}$$

Toda la obra lo harán en :
(aplicando "regla de tres")

12 horas

Para este tipo de problemas es recomendable aplicar:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \dots + \frac{1}{t_n} = \frac{P}{T}$$

Donde:

t_k = tiempo que demora c/obrero en hacer la obra.

P = parte de la obra a hacer.

Si es toda ⇒ P = 1

T: tiempo que demora en hacerse la parte de la obra, actuando juntos.

* Para el ejemplo anterior:

$$t_1 = 20h \quad ; \quad t_2 = 30h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{T}$$

$$\text{m.c.m.} = 60T$$

$$3T + 2T = 60$$

$$5T = 60$$

$$T = 12h$$

Ejm. 12

Una bomba A puede llenar una piscina funcionando sólo en 4 horas. Otra bomba B lo puede llenar en 5 horas, pero otra bomba C lo puede descargar totalmente en 20 horas. ¿Qué tiempo emplearán las tres bombas funcionando a la vez para llenar totalmente la piscina?

Resolución:

Podemos aplicar directamente:

$$\frac{1}{t_1} \pm \frac{1}{t_2} \pm \frac{1}{t_3} \pm \dots \pm \frac{1}{t_n} = \frac{P}{T}$$

donde:

t_k : tiempo que emplea c/grifo en llenar o descargar un depósito.

P : parte del depósito a llenar

T : tiempo que demora en llenarse

(+) cuando llena

(-) cuando descarga

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{1}{T}$$

$$\text{m.c.m.} = 20T$$

$$5T + 4T - T = 20$$

$$8T = 20$$

$$T = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$T = 2h 30 \text{ min}$$

PROBLEMAS PARA DESARROLLAR EN CLASE

1) Simplificar:

$$E = \frac{0,666... + 0,5 + 0,833...}{\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}}$$

Rpta.

2) Simplificar la siguiente expresión:

$$E = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{8}{15} - \frac{4}{15} \div \frac{2}{5} + \frac{3}{5}}$$

Rpta.

3) Gasté los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{5}{8}$ de mi dinero y aún me quedan los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{7}$ de S/.4200. ¿Cuánto tenía al principio?

Rpta.

4) Si a los términos de una fracción se les resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$ y si a los dos términos se le añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Determinar la fracción.

Rpta.

5) A los términos de una fracción se le suma el denominador y al resultado se les resta la fracción original, obteniéndose la fracción original. ¿Cuál es la fracción?

Rpta.

6) De un salón de "x" alumnos, $\frac{2}{3}$ dieron examen y los $\frac{3}{7}$ de estos aprobaron, de los cuales sólo $\frac{1}{4}$ tuvieron notas mayores que 15. Cuántos dieron examen, si los que tienen nota mayores de 15 son 6?

Rpta.

7) En una clase de "a" alumnos, la tercera parte de los ausentes es igual a la séptima parte de los presentes, ¿Qué fracción de los alumnos estuvieron ausentes?

Rpta.

8) De un tonel de 1400 litros se extrae $\frac{1}{4}$ de lo que no se extrae, luego $\frac{1}{4}$ de lo que ya se había extraído. ¿Cuánto se extrajo en total?

Rpta.

9) Un tonel está lleno un cuarto de lo que no está lleno. ¿Qué fracción del tonel queda vacío si se vacía un tercio de lo que no se vacía?

Rpta.

10) Dos cilindros contienen en total 688 litros. Si se saca $\frac{1}{4}$ del contenido del primero y $\frac{2}{5}$ del segundo, queda 30 litros más en el primero que en el segundo. ¿Cuántos litros hay en cada cilindro?

Rpta.

11) La suma de un número más los $\frac{3}{4}$ del mismo es igual a 21 más la mitad de aquella suma. ¿Cuál es la tercera parte de dicho número?

Rpta.

12) Hallar una fracción tal que si se le agrega su cubo, la suma que resulta es igual al cubo de la misma fracción, multiplicada por $\frac{13}{4}$.

Rpta.

13) Una piscina está llena hasta sus $\frac{2}{3}$ partes. Si se sacara 2100 litros, estaría llena hasta sus $\frac{3}{8}$. ¿Cuántos litros falta para llenarla?

Rpta.

14) Un camión cargado con arroz pesa 15900 kg y cuando esta lleno hasta los $\frac{5}{7}$ pesa los $\frac{9}{5}$ del camión vacío. Encontrar el peso del camión vacío.

Rpta.

15) A y B pueden hacer un trabajo en $6\frac{2}{3}$ días; A y C pueden hacer el mismo trabajo en $4\frac{4}{5}$ días; y A, B y C pueden hacer la obra en $3\frac{3}{4}$ días. ¿Cuánto tiempo tardará A para hacer solo dicho trabajo?

Rpta.:

16) Una tubería "A" puede llenar un estanque en 6 horas y otra tubería "B" de desagüe la puede vaciar en 8 horas. Estando vacío el estanque se hace funcionar "A" durante dos horas y luego se abre la otra tubería "B" funcionando así las dos. ¿Qué tiempo total emplearon para llenar el estanque?

Rpta.:

17) Tres tuberías "A"; "B" y "C" funcionando juntas, pueden llenar la mitad de un tanque en cuatro horas. Si funcionando sólo "A" y "B" pueden llenar todo el estanque en 10 horas; y si funcionando "B" y "C" lo llenan en 15 horas. ¿En cuántas horas llenará la tercera parte del estanque la tubería "B", si funciona sola?

Rpta.:

18) Estando el desagüe de una piscina cerrado, un caño demora 6 horas en llenarla; y estando abierto el desagüe, el caño demora 9 horas en llenarla. Si llenamos la piscina y cerramos el caño. ¿En cuánto tiempo se vaciará completamente la piscina?

Rpta.:

19) Dos obreros pueden realizar un trabajo en 15 días, si uno de ellos se demora 16 días más que el otro trabajando solo. ¿En qué tiempo haría la obra el más eficiente?

Rpta.:

20) Diana puede hacer un trabajo en 12 días y María hace el mismo trabajo en 60 días. Después de trabajar juntos durante 2 días se retira Diana. ¿En qué tiempo terminará María la parte que falta?

Rpta.:

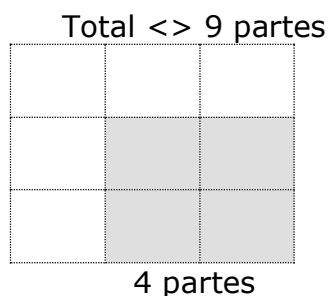
23) Una compañía tiene 3 pintores; Luis que puede pintar una casa en 6 días; José que puede pintar una casa en 8 días y Pedro que puede pintar una casa en 12 días. La compañía firma un contrato para pintar 3 casas. Empieza Luis, quien trabaja 8 días; luego lo reemplaza José, quien trabaja durante 6 días, y es reemplazado por Pedro, quien concluye el contrato. ¿Cuántos días trabaja Pedro?

Rpta.:

PORCENTAJES (TANTO POR CUANTO)

TANTO POR CUANTO:

Veamos un ejemplo, tenemos un terreno de forma cuadrada y la dividimos en parcelas de 9 partes iguales y tomamos 4 de esas partes:



=> 4 partes de 9 <> $4/9$
"el 4 por 9"

Además:

Total <> 9 partes <> $9/9$ <>
"el 9 por 9"

En general, dividimos una cantidad en "n" partes y tomamos "m" partes, entonces: m partes <> m/n <> "el m por n"

Ejemplo:

Del Centro Preuniversitario ingresarán

20 de cada 30 postulantes

- 20 de cada 30 ingresarán

- 20 por cada 30 ingresarán

- 20 por 30 ingresarán

EL TANTO POR CIENTO (%)

Es un caso particular de la regla del tanto por cuanto, donde la cantidad se divide en 100 partes iguales de los cuales tomaremos "m" partes iguales.
m partes <> $m/100$ <> m %

→ "el m por ciento".

Ejemplos:

- El 6 por 25 <>
- El 70 por 200 <>
- El 300 por 40 <>
- El 87 por ciento <>
- El 20 por ciento <>
- El a por b <>
- El x% <>

Equivalencias:

- 25% <>
- 30% <>
- 18% <>
- 33 1/3% <>
- 2/5 <>
- 3/5 <>
- 7/8 <>
- 3 <>
- 1,5 <>

Calcular:

- a) el 56% de 3000
- b) el 53% de 200
- c) el 13 por 20 de 60
- d) el 5 por 8 del 4 por 7 de 28
- e) el 10% del 30% del 50% de 2000

Se pueden sumar o restar porcentajes de una misma cantidad:

Ejemplos:

- a) $N + 20\% N = \dots\dots\dots$
- b) $B - 30\% B = \dots\dots\dots$
- c) $2A + 40\% A - \frac{3}{5} A = \dots\dots\dots$
- d) $60\% A + 2 (13\%A) - 0,5 A = \dots\dots$

RELACIÓN PARTE - TODO EN TANTO POR CIENTO

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \cdot 100$$

Parte: se indica con los términos: "es" "son", "serán"
 Todo: se indica con los términos: de, del, de los,

Ejemplos:

1. ¿Qué tanto por ciento es 20 respecto a 80?

$$\frac{P}{T} \cdot 100 \rightarrow \frac{20}{80} \cdot 100 = 25\%$$
2. ¿Qué tanto por ciento de 60 es 6?

$$\frac{P}{T} \cdot 100 \rightarrow \frac{6}{60} \cdot 100 = 10\%$$
3. ¿Qué tanto por ciento es A de B?

$$\frac{P}{T} \cdot 100 \rightarrow \frac{A}{B} \cdot 100 = \frac{100A}{B}$$
4. ¿Qué tanto por ciento de (m+1) es m²-1?

$$\frac{P}{T} \cdot 100 \rightarrow \frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)} \cdot 100 = 100(m-1)$$
5. En nuestro salón de clases se observa que hay 42 alumnos hombres y las mujeres representan el 33 1/3% de aquellos. ¿Qué tanto por ciento representa los varones respecto al total de alumnos?

Varones: 42

Mujeres: $33 \frac{1}{3}\% (42) = \frac{100}{3}\% (42) = 14$

Total de alumnos: $42 + 14 = 56$

$$\frac{P}{T} \cdot 100 \Rightarrow \frac{42}{56} \cdot 100 = 75\%$$

APLICACIONES

Respecto a un total (100%)

Pierde	Queda	Gano	Tengo
20%	80%	10%	110%
60%	40%	33%	133%
m%	(100-m)%	X%	(100+x)%

Ejemplos:

1. Una persona tenía S/.240 y perdió 3 veces consecutivas el 25%; 10% y 50% respectivamente, lo que le iba quedando. ¿Cuánto le quedo al final?

Solución:

Si pierde: 25% 10% 50%

↓ ↓ ↓

Le queda: 75% 90% 50%

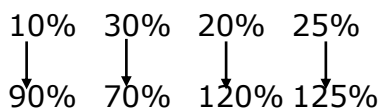
$$\frac{75}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot 240 = S/. 81$$

Otro procedimiento:
 240 - 25% le queda 180 (240-60)
 180 - 10% le queda 162 (180-18)
 162 - 50% le queda 81 (162-81)

2. En una sala de "BINGO" una persona tenía cierta cantidad de dinero y apuesta 4 veces consecutivas. En las dos primeras pierde el 10% y 30% y en las dos últimas ganan el 20% y 25%; siempre de lo que iba quedando. Si al final se retiró con S/.1890. ¿Cuánto tenía al inicio? ¿Ganó o perdió?.

Solución:

Dinero inicial: x



$$\Rightarrow \frac{90}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{125}{100} \cdot x = 1890$$

$$x = 2000.$$

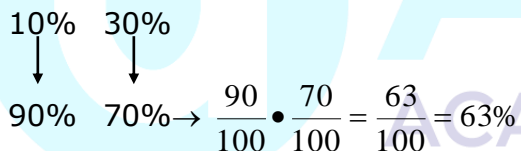
$$\therefore \text{perdió: } 2000 - 1890 = \text{S/. } 110$$

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Ejemplos:

- ¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 10% y 30%?

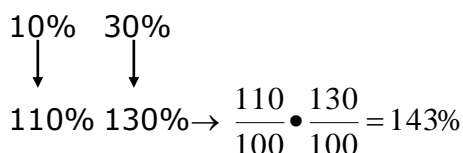
Aplicando el método práctico



Comparando con el número base
Se ha descontado el 37%.

- ¿A qué aumento único equivalen dos aumentos sucesivos del 10% y 30%?

Aplicando el método práctico:

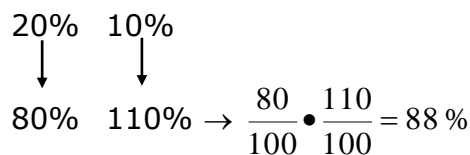


Comparando con el número base
equivale a un aumento del 43%.

- El precio del azúcar en este mes ha bajado en un 20% pero para el próximo mes se proyecta un

incremento del 10%. En cuánto varía el precio, con respecto al inicial?

De acuerdo al enunciado tenemos:



Comparando con el número base el precio disminuye en 12%.

VARIACIONES PORCENTUALES

Se denomina así al cambio que experimenta una cantidad, con relación a su valor original y que es expresado en tanto por ciento.

Ejemplos:

- Si un número aumenta en 20%. ¿En qué tanto por ciento aumenta su cuadrado?

Podemos analizar tomando como base un número cualquiera que para nuestro caso es conveniente el número 10 debido a que su cuadrado me dará como resultado 100.



Aumenta en 44%

Otro procedimiento:
Número base: 100%
Aumentamos su 20% \rightarrow 120%

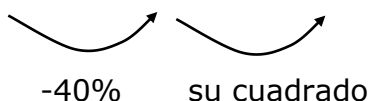
Su cuadrado \rightarrow (120%)² =

$$\left(\frac{120}{100}\right)^2 = \left(\frac{144}{100}\right) = 144\%$$

Por lo tanto aumenta en 44%

2. Si un número disminuye en 40%.
¿En qué tanto por ciento disminuye su cuadrado?

$$100\% \rightarrow 60\% \Rightarrow (60\%)^2 = 36\%$$



Por lo tanto a disminuido en 64%

3. Si el radio de un cilindro aumenta en 10% y su altura disminuye en 20%. ¿En qué tanto por ciento varía su volumen?

El volumen de un cilindro está relacionado de la forma siguiente:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Notamos que la variación del volumen depende directamente de "r" y "h"

$$r^2 \cdot h$$

$$(110\%) (80\%) \Rightarrow \left(\frac{110}{100}\right)^2 \left(\frac{80}{100}\right) = 96.8\%$$

Con respecto al número base a disminuido en 3,2%

APLICACIONES COMERCIALES

En las transacciones comerciales se involucra tres elementos básicos que son:

- PV = Precio de venta
- PC = Precio de costo
- G = Ganancia o P = Pérdida
- PV = PC + G
- PV = PC - P

Observaciones:

1. Los tantos por cientos de ganancias y de pérdida se aplican

al precio de costo, salvo especificación contraria en el problema.

2. Los tantos por cientos de rebaja o descuento se aplican al precio fijado o de lista, salvo otra especificación.

Ejemplos:

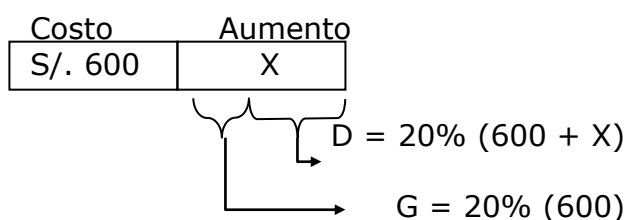
1. Se compra un T.V. en \$ 800. ¿A cómo deberá vender si se quiere ganar el 20% del costo?

$$\begin{aligned} PC &= \$ 800 \\ G &= 20\% \\ PV &= 800 + 20\% (800) \\ \mathbf{PC} &= \mathbf{\$ 960} \end{aligned}$$

2. Vendiendo un juego en 1500 soles se gana el 20% del costo. ¿Cuál es su costo?

$$\begin{aligned} PV &= \$ 1500 \\ G &= 20\% \\ 1500 &= PC + 20\% PC \\ 1500 &= 120\% PC \\ \mathbf{PC} &= \mathbf{\$ 1250} \end{aligned}$$

3. Un artículo que costó S/. 600 se vendió haciendo un descuento del 20% y aún así se ganó el 20% del precio de costo. Hallar el precio fijado.



Del gráfico podemos observar:
 $X = 20\% (600 + x) + 20\% (600)$
 $X = 120 + 20\%x + 120$
 $80\%x = 240$

$$\mathbf{X = 300}$$

El precio fijado será el costo mas el aumento:

$$PF = 600 + 300$$

PF = 900

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Jorge vende su televisor en \$120 perdiendo en la venta \$ 30. ¿Qué % perdió?

Solución:

PV = \$ 120
 Pérdida: \$ 30 ⇒ Pc = \$ 150
 ∴ Perdió (%) : $\frac{30}{150} \times 100$
 = 20%

2. Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 20% de lo que me queda, perdería \$160. ¿Cuánto tengo?

Solución:

Tengo: x
 Si gastara: 30%x ⇒
 me quedaría: 70%x
 si ganara: 20% (70%x) = 14%x
 tendría 84% de x
 ∴ perdería: 100-84 = 16%x
 16%x <> \$160
 ⇒ x = \$ 1000

3. El señor López vendió dos pipas a \$120 c/u. Basada en el costo, su ganancia en una fue 20% y su pérdida en la otra fue 20%. ¿Cuánto perdió?

Solución:

PV ₁ = 120	PV ₂ = 120
G ₁ = 20% PC ₁	P ₂ = 20% PC ₂
PV ₁ = 120% PC ₁	PV ₂ = 80%PC ₂
120 = 120% PC ₁	120=80%PC ₂
PE _T = 100	PC ₂ = 150
PV _{TOTAL} = \$ 240	
P _{CTOTAL} = \$250	
∴ perdió: \$10	

4. En un salón de clase hay 16 varones y 24 mujeres. ¿Cuántas mujeres deben retirarse para que

el porcentaje de hombres aumente en 24%?

Solución:

40	{	V: 16 → $\frac{16}{40} \times 100 =$	40%	}
		M: 24 →	60%	
		- X Mujeres	+24	
40-X	{	V: 16 =	64%	}
		M: 24 - X =	36%	

⇒ $\frac{16}{40-x} = 64\%$

$\frac{16}{40-x} = \frac{64}{100}$

Desarrollando:
 40 - x = 25
x = 15

5. Si la base de un triángulo disminuye 30% y la altura aumenta 40%. ¿En qué porcentaje varía su área?

Solución:

b	$\xrightarrow{-30\%}$	70% b
h	$\xrightarrow{+40\%}$	140%h
$\left(A = \frac{b \cdot h}{2} \right)$		

A_i = b.h A_f = (70%b) (140%h)
 A_i = 100%(bh) A_f = 98%(b.h)

⇒ disminuye en 2%

6. Se tiene 80 litros de una mezcla que contiene Alcohol y H₂O, al 60% de Alcohol. ¿Qué cantidad de agua se debe agregar, para obtener una nueva mezcla al 20% de alcohol?

Solución:

$$80 \begin{cases} \text{Alcohol: } 60\% (80) = 48 \\ \text{Agua: } 40\% (80) = 32 \end{cases}$$

+ x litros de agua

$$80 + x \begin{cases} \text{Alcohol: } 48 \dots\dots\dots 20\% \\ \text{Agua: } 32 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{48}{80+x} = 20\%$$

$$\frac{48}{80+x} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$240 = 80 + x$$

x = 160

7. A puede hacer un trabajo en 9 días, B es 50% más eficiente que A; el número de días que B emplea para hacer el mismo trabajo, es:

Solución:

Trabajador	T(días)	Eficiencia
A	9	100%
B	x	150%

A mayor eficiencia, menor cantidad de días; por lo tanto, aplicando "regla de tres simple inversa", tenemos:

$$9 (100) = x (150)$$

x = 6 días

PROBLEMAS PARA RESOLVER

EN CLASE

1. En cada caso
 - a) Hallar el 30% de 900
 - b) Hallar el 0,8% de 2000
 - c) Hallar el 1/3% de 900
 - d) Hallar el (a-b)% de $\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right)$
 - e) Hallar x+y, sabiendo que x% del y% 400 es 2x; y el x% de 500 es 2y.

2. Hallar
 - a) El 4% de un número es 12. Hallar dicho número.
 - b) El 25% de que número es 40.
 - c) El 25% de una cantidad es 30. Hallar el 10% de dicha cantidad.

3. Si Roberto tuviera 20% más de la edad que tiene, tendría 48 años. ¿Qué edad tiene?
Rpta.

4. Si se disminuye el 20% del dinero que tiene Pedro, le quedaría S/.40. ¿Cuánto tiene?
Rpta.

5. Resolver:
 - a) ¿Qué tanto por ciento de 400 es 10?
 - b) ¿Qué tanto por ciento de 2500 es 600?

6. En un salón de clase hay 60 alumnos, de los cuales 45 son mujeres, ¿Qué tanto por ciento del total son varones?
Rpta.

7. Si el 40% del 50% de "A" es el 30% de "B" ¿Qué tanto por ciento de $(2A + 7B)$ es $(A + B)$?

Rpta.

8. El precio de lista de un artefacto eléctrico es de \$ 1200. Sobre esta cantidad se hacen dos descuentos sucesivos del 30% y 20% al realizarse la venta, ¿Cuál ha sido el descuento total?

Rpta.

9. Los descuentos sucesivos del
 a) 20% y 25% es equivalente a
 b) 10% y 20% es equivalente a
 c) 10% y 5% es equivalente a

10. Si un número aumenta en 10% ¿En qué tanto por ciento aumenta su cuadrado?

Rpta.

11. Si un número aumenta en 20% ¿En qué tanto por ciento aumenta su cubo?

Rpta.

12. Sea la expresión $E=x.y$; si "x" aumenta en un 40% e "y" aumenta en un 50%. ¿En qué tanto por ciento aumenta la expresión?

Rpta.

13. En qué tanto por ciento varía el área de un círculo, si su radio se triplica?

Rpta.

14. En qué tanto por ciento varía el área de un rectángulo si su lado se incrementa en un 20% y su ancho disminuye en un 10%

Rpta.

15. ¿En qué tanto por ciento varía el área de un triángulo si su base se incrementa en un 20% y su altura disminuye en un 10%?

Rpta.

16. Un padre compra a su hijo un "skateboard" en \$ 80, pero como al hijo no le gusta el modelo, lo quiere vender ganando el 20%. ¿A cómo lo venderá?

Rpta.

17. Un artículo que costó S/. 1500 se vendió ganando el 40% del precio de venta. ¿Cuál fue el precio de venta?

Rpta.

18. Si se vendiera un artículo en S/.2530 se ganará el 15% del 10% del 80% del costo. ¿A cuánto debe vender el objeto para ganar el 20% del 25% del 60% del costo?

Rpta.

19. De un total de 120 personas, 80 son hombres y el resto mujeres. Si se retiran la cuarta parte de los hombres y la mitad de las mujeres, ¿Cuál será el porcentaje de las mujeres?

Rpta.

20. En un recipiente hay 40 Lt. de alcohol al 90% de pureza, en el otro 60 Lt de alcohol al 70%. Si mezclamos, calcular el grado de pureza de la mezcla

Rpta.

SUCESIONES

NOCIÓN DE SUCESIÓN

Una sucesión es un conjunto ordenado de elementos (número, letras, figuras) tales que cada uno ocupa un lugar establecido, de modo que se puede distinguir el primero, el segundo, el tercero y así sucesivamente; acorde con una ley de formación, criterio de orden o fórmula de recurrencia. A los elementos de este conjunto se les denominan términos de la sucesión.

Las sucesiones pueden ser:

- Sucesiones gráficas
- Sucesiones literales
- Sucesiones numéricas

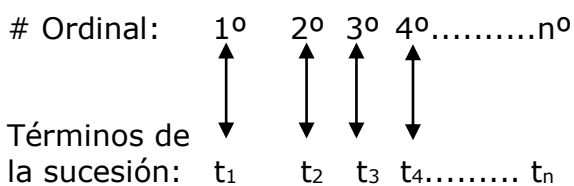
En ocasiones se presentan algunas sucesiones que son combinación de las anteriores.

Ejemplos:

- a) 5; 7; 11; 17;
- b) 17; 33; 65; 129;
- c) 1; 8; 27; 64;
- d) 5; 12; 20; 30; 43;
- e) F; H; J; L; N; ...

SUCESION NUMERICA

Es un conjunto ordenado de números en el que cada uno de ellos tiene un orden designado; es decir que a cada uno de los términos de la sucesión le corresponde un número ordinal. Así



Ejm. 1:

Hallar los 5 primeros términos en cada caso, teniendo en cuenta las siguientes fórmulas de recurrencia:

a) $t_n = 2n^3 + 1$

Solución:

Aplicando el principio de valor numérico, tenemos:

$$t_1 = 2 \times 1^3 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$t_2 = 2 \times 2^3 + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$t_3 = 2 \times 3^3 + 1 = 54 + 1 = 55$$

$$t_4 = 2 \times 4^3 + 1 = 128 + 1 = 129$$

$$t_5 = 2 \times 5^3 + 1 = 250 + 1 = 251$$

⇒ los términos de la sucesión son: 3, 17, 55, 129, 251,

b) $t_n = \frac{n^2}{n+1}$

Solución:

$$t_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad t_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$t_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4} \qquad t_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$t_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

⇒ Los términos de la sucesión son:

$$\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; \frac{25}{6}; \dots$$

c) $t_n = n^2 + 4$

⇒

d) $t_n = 3n + 1 + (n-1)(n-2)$

⇒

e) $t_n = n + 2(n-1)(n-2)(n-3)$

⇒

Ejm. 2:

Hallar el término enésimo en cada caso.

a) 4; 9; 16; 25;

Solución:

Analizando cada uno de los términos.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_n
4	9	16	25		
2^2	3^2	4^2	5^2	⇒	$(n/1)^2$

∴ $t_n = (n/1)^2$

b) 2; 6; 12; 20;

Solución

Analizando cada uno de los términos

t_1	t_2	t_3	t_4	t_n
2	6	12	20		
1×2	2×3	3×4	4×5	⇒	$n(n+1)$

∴ $t_n = n(n+1)$

c) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...

$t_n = \dots\dots\dots$

d) 3; 6; 11; 18;

$t_n = \dots\dots\dots$

e) $\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{9}{11}; \frac{6}{7}; \dots\dots$

$t_n = \dots\dots\dots$

SUCESIONES NUMERICAS
IMPORTANTES

SUCESIÓN ARITMÉTICA (Sucesión Lineal o de Primer Orden)

La diferencia entre dos términos consecutivos (también llamada razón aritmética) es siempre constante. Su término enésimo está dado por:

$t_n = rn + t_0$;	$t_0 = t_1 - r$
------------------	---	-----------------

t_n : Término enésimo

t_0 : Término anterior al primero
 $t_0 = t_1 - r$

r : Razón aritmética
 $r = t_2 - t_1$

n : Lugar del término enésimo

Ejm. 3:

Hallar el término enésimo en cada caso:

a) 7; 12; 17; 22;

Solución:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 12 & 17 & 22 \dots \\ +5 & +5 & +5 & \end{array}$$

⇒ $r = 5;$
 $t_0 = 7 - 5 = 2$

⇒ **$t_n = 5n + 2$**

b) 45, 39, 33, 27,

Solución:

$$\begin{array}{cccc} 45 & 39 & 33 & 27 \\ -6 & -6 & -6 & \end{array}$$

⇒ $r = -6;$
 $t_0 = 45 - (-6) = 51$

∴ $t_n = -6n + 51$ ó $t_n = 51 - 6n$

c) 4, 12, 20, 28, ...

Solución:

.....
.....

$$\Rightarrow t_5 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

c) I; E;G; F; E;G;

Solución:

Observamos que la letra E se repite, por lo que podemos suponer que se trata de dos sucesiones alternadas, las cuales las individualizamos, de modo que tenemos:

* I G E C
 H F D

* E F G → H
 $\Rightarrow t_7 = C$

d) 1; 4; 27; 256;

Solución:

Analizando cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 &= 1^1 \\ t_2 &= 4 &= 2^2 \\ t_3 &= 27 &= 3^3 \\ t_4 &= 256 &= 4^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_5 = 5^5 = 3125$$

e) 2; 12; 30; 56;

Solución:

Analizando cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 = 1 \times 2 \\ t_2 &= 12 = 3 \times 4 \\ t_3 &= 30 = 5 \times 6 \\ t_4 &= 56 = 7 \times 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_5 = 9 \times 10 = 90$$

Ejm. 8:

Calcular el término enésimo de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 4; 9; 14; 19;

Solución:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 9 & 14 & 19 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ +5 & +5 & +5 & \\ \Rightarrow & r = 5 & & \end{array}$$

La sucesión es de primer orden, donde $t_0 = 4 - 5 = -1$

$$\Rightarrow t_n = 5n - 1$$

b) 5; 12; 23; 38;

Solución:

$$\begin{array}{cccc} 5 & 12 & 23 & 38 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ +7 & +11 & +15 & \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & & \\ +4 & +4 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow r = 4$$

La sucesión es de segundo orden

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 12 & 23 & 38 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ +3 & +7 & +11 & +15 & \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & & \\ +4 & +4 & +4 & & \end{array}$$

$$r = 4 ; \quad m_0 = 3 \quad t_0 = 2$$

$$a = \frac{4}{2} = 2 \quad b = 3 - 2 = 1 \quad c = 2$$

$$\Rightarrow t_n = 2n^2 + n + 2$$

c) 3; 7; 11; 24;.....

Solución:

$$\begin{array}{cccc}
 3 & 7 & 11 & 24 \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\
 +4 & +4 & +13 & \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & & \\
 0 & +9 & &
 \end{array}$$

De acuerdo al análisis no se puede determinar que orden es; por lo tanto asumimos que se trata de primer orden, cuya razón es:

$$r = 4;$$

$$\text{de donde: } t_0 = 3 - 4 = -1$$

$$\Rightarrow t_n = 4n - 1$$

De donde:

$$t_1 = 4(1) - 1 = 3$$

$$t_2 = 4(2) - 1 = 7$$

$$t_3 = 4(3) - 1 = 11$$

$$t_4 = 4(4) - 1 = 15 \text{ (no cumple)}$$

Como a cumplido para tres términos, entonces concluiremos que el término general será de tercer orden y tendrá la forma:

$$A_n = t_n + k(n-1)(n-2)(n-3)$$

Es decir:

$$A_n = 4n - 1 + k(n-1)(n-2)(n-3) \quad (..I)$$

- Debemos calcular "K", para la cual tenemos de la sucesión principal tenemos que $A_4 = 24$

En (I) tenemos:

$$\Rightarrow 24 = 4(4) - 1 + k(4-1)(4-2)(4-3)$$

$$24 = 15 + k(3)(2)(1)$$

$$\text{de donde } k = \frac{3}{2}$$

$$\therefore A_n = 4n - 1 + \frac{3}{2}(n-1)(n-2)(n-3)$$

PROBLEMAS PARA DESARROLLAR EN CLASE

1. Hallar el término que sigue en:

- a) 2; 3; 5; 7; 11;.....
 - b) 1; 1; 2; 3; 5; 8;.....
 - c) 1; 1; 2; 4; 7; 13;.....
 - d) F; H; K; L; O; O;;....
 - e) W; T; P; N; J;...
 - f) Y; W; S; N;...
 - g) A; D; G; K; Ñ; S; ...
 - h) 6; 14; 14; 14; 32; 96;...
 - i) 1; 1; 1; 2; 12;...
 - j) 1; 2; 10; 37;...
 - k) 40; 0; 0; 30; 90; 200; 410;
2. Calcular el término enésimo de cada una de las sucesiones siguientes:
- a) 36; 31; 26; 21;
 - b) -19; -16; -13; -10;...
 - c) 2; 7; 14; 23;.....
 - d) $\frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \frac{17}{15}; \dots$

3. Se sabe que seis términos consecutivos de la sucesión: 8; 11; 14; 17 ;..... suman 147. calcular el quinto término de los seis mencionados.

Rpta:.....

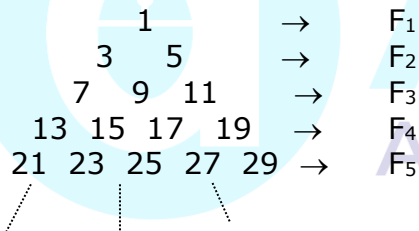
4. Hallar el segundo término negativo de la sucesión 213; 207; 201; 195;.....

Rpta:.....

5. Se tiene la progresión aritmética creciente:
 \overline{aaa} ; $\overline{ab4}$; $\overline{ac1}$;.....
 Hallar el séptimo término.

Rpta:.....

6. En el siguiente triángulo numérico, hallar la suma del primer y último término de la fila 20.



Rpta:.....

7. Calcular el número de términos de la siguientes sucesión; así como el valor de "a"

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{28}, \frac{9}{70}, \frac{15}{130}, \dots, \frac{a}{1720}$$

Rpta:.....

8. Dada la siguiente sucesión:
 2, 9, 28, 65, 126.....
 ¿Cuántos términos son de 4 cifras?

Rpta:.....

9. Ruth se propone leer una novela diariamente, el primer día lee 3 páginas, el segundo día lee 8 páginas, el tercer día 15 páginas, el cuarto día 24 páginas, y así sucesivamente hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 14 veces el número de días que ha estado leyendo. Hallar el número de páginas leídas en dicho día.

Rpta:.....

10. Hallar el valor de "n" en la siguiente sucesión: (a+3); (a+7)³; (a +11)⁵;.....;(a+118-n)ⁿ

Rpta:.....

11. Los términos de la sucesión definidos por: $t_n = 8n^2 - 6n + 3$ ocupan los lugares impares de una nueva sucesión y los términos de la sucesión definidos por $t_n = 8n^2 + 2n + 2$ ocupan los lugares pares de la misma nueva sucesión. Calcular el término enésimo de la nueva sucesión formada.

Rpta:.....

12. ¿Cuántos términos de tres cifras presenta la siguiente sucesión?
 3, 9, 19, 33,.....

Rpta:.....

13. Calcular la diferencia de los términos "n-ésimos" en:

$$\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{7}, \frac{14}{9}, \dots$$

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{11}{15}, \frac{8}{9}, \dots$$

Rpta:.....

14. Juan va a una tienda y compra un caramelo, regalándole el vendedor un caramelo por su compra. En una segunda vez compra 3 caramelos y le regalan 2, en la tercera compra 6 y le regalan 3, en la cuarta vez compra 10 y regalan 4, en la quinta vez compra 15 y regalan 5 y así sucesivamente, ¿Cuántos caramelos recibirá en total cuando entra a la tienda a compra por vigésima vez?
- Rpta:.....
15. Hallar el número de términos en:
4; 6; 7; 9; 10; 12; 13;...; 301
- Rpta:.....
16. ¿Cuál es el término más cercano a 1000, en:
20; 39; 58; 77;....
- Rpta:.....
17. Cuántos términos hay entre 200 y 300, en la siguiente sucesión?
7; 18; 29; ...
- Rpta:.....
18. Hallar el término que sigue en:
1; 2; 3; 4; 125;.....

SERIES NUMÉRICAS

Se denomina serie numérica a la adición indicada de los términos de una sucesión numérica y al resultado de la adición se le llama valor de la serie

Ejm:
9; 18; 27; 36; sucesión numérica

$$9 + 18 + 27 + 36 = 90$$

Serie numérica Valor de la serie

SERIE ARITMÉTICA

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 + & t_2 + & t_3 + & t_4 + \dots + & t_{n-1} + & t_n \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\ +r & +r & +r & & +r & \end{array}$$

$$S = \left(\frac{t_n + t_1}{2} \right) n$$

$$n = \frac{t_n - t_0}{r}$$

- n = Número de términos
- S = Suma de términos
- t_n = Último término
- t₁ = Primer término
- t₀ = Término anterior al primero
- r = Razón de la serie

$$r = t_2 - t_1$$

Ejm. 1.

Hallar el valor de la siguiente serie

$$S = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 58 + 61$$

Solución

Cada término de la serie es igual al anterior aumentado en tres; es decir que la diferencia entre dos términos consecutivos es 3; por lo tanto:

$$r = 3$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{61+4}{2} \right) \left(\frac{61+1}{3} \right) = \left(\frac{65}{2} \right) \left(\frac{60}{3} \right)$$

$$S = 650$$

SERIE GEOMETRICA

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 + & t_2 + & t_3 + & t_4 + \dots + & t_{n-1} + & t_n \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\ xq & xq & xq & & xq & \end{array}$$

$$S = \frac{t_n \cdot q - t_1}{q - 1}$$

$$S = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

- S = Suma de términos
- t₁ = Primer término
- t_n = Enésimo término
- n = Números de términos
- q = Razón de la serie

Ejm. 2:

Calcular el valor de la siguiente serie

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 1536$$

Solución:

Observamos que cada término de la serie es el doble del anterior, entonces:

$$q = 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{1536 \times 2 - 3}{2 - 1} = 3069$$

$$\text{ó } S = 3 \times \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$

Calculo de n:

$$1536 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 512 = 2^9$$

$$n - 1 = 9$$

$$\Rightarrow n = 10$$

$$\therefore S = 3(2^{10} - 1) = (1024 - 1)$$

$$S = 3069$$

SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE E INFINITA: (0 < Q < 1)

El valor aproximado de "S" lo obtendremos: aplicando:

$$S_{\text{LIMITE}} = \frac{t_1}{1 - q}$$

t₁ = Primer término

q = Razón

Ejm.3:

Hallar el valor de "S", si

$$S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 \dots$$

Solución:

Observamos que cada término de la serie es la mitad del término anterior; por lo tanto:

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{32}{1 - 1/2} = \frac{32}{1/2} = 64$$

REPRESENTACIÓN DE UNA SUMATORIA:

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n$$

Se lee: sumatoria de los "ai" desde i= k hasta i = n; donde "k" y "n" son los límites inferior y superior de la Σ, e "i" se llama índice de la sumatoria

PROPIEDADES

1. N° de términos de una sumatoria

$$\sum_{i=k}^n x_i = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n$$

$$\text{N° términos} = n - k + 1$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=3}^{25} x_i \Rightarrow \text{hay } 25 - 3 + 1$$

2. Para sumas o diferencias de dos o más variables

$$\sum_{i=k}^n (a_i + b_i - c_i) = \sum a_i + \sum b_i - \sum c_i$$

3. La sumatoria de una constante es igual al N° de términos por la constante

$$\sum_{i=k}^n a = (n - k + 1)a$$

4. Una Σ se puede descomponer en dos o más Σ parciales

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i$$

5. Sumatoria de una constante y una o más variables

$$\sum_{i=1}^k (ax_i \pm by_i) = a \sum_{i=1}^k x_i \pm b \sum_{i=1}^k y_i$$

SERIES (Sumas) NOTABLES

1. Suma de los "n" primeros IN consecutivos

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejm. 4

Hallar el valor de:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$$

$$= \frac{50(51)}{2}$$

$$= 1275$$

$$Y = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 120$$

$$= \frac{1}{2} [1 + 2 + 3 + \dots + 240]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{240(241)}{2} \right]$$

$$= 14460$$

$$A = 31 + 32 + \dots + 89$$

En este caso le sumamos y restamos (1+2+3+...+30).

$$A = (1+2+3+\dots+30) + 31+32+\dots+89$$

$$-(1+2+3+\dots+30)$$

$$A = \frac{89(90)}{2} - \frac{30(31)}{2} = 3540$$

$$\sum_{i=n_1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n_0(n_0+1)}{2}$$

2. Suma de los "n" primeros IN impares consecutivos

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

$$= n^2$$

Ejm. 5:

Hallar el valor de:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 69$$

$$2n - 1 = 69; n = 35$$

$$S = 35^2 = 1225$$

$$P = 3 + 9 + 15 + \dots + 153$$

$$= 3(1 + 3 + 5 + \dots + 51)$$

$$P = 3 \left[\frac{51+1}{2} \right]^2$$

$$= 3(26)^2 = 2028$$

$$Q = 51+53+\dots+139$$

$$Q = \left(\frac{139+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{49+1}{2} \right)^2$$

$$Q = 4900-325 = 4275$$

3. Suma de cuadrados de los "n" primeros IN consecutivos

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejm. 6:

Hallar el valor de:

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 361$$

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 19^2$$

$$A = 19(20)(39)/6 = 2470$$

$$S = 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 24^2$$

Sumando y restando:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

$$S = \frac{24(25)(49)}{6} - \frac{10(11)(21)}{6}$$

$$S = 4900-385$$

$$S = 4515$$

4. Suma de cubos de los "n" primeros IN consecutivos:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ejm. 7:

Hallar el valor de:

$$S = 1+8+27+64+\dots+8000$$

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$$

$$S = \left(\frac{20(21)}{2}\right)^2 = 210^2 = 44100$$

$$A = 125+216+343+\dots+1728$$

$$A = 5^3 + 6^3 + 7^3 + \dots + 12^3$$

$$A = \left(\frac{12(13)}{2}\right)^2 - \left(\frac{4(5)}{2}\right)^2 = 5984$$

5. Suma de cuadrados de los "n" primeros números impares consecutivos

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

Ejm. 8:

Hallar el valor de:

$$S = 1 + 9 + 25 + \dots + 2601$$

$$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 51^2$$

$$2n - 1 = 51 ; n = 26$$

$$\rightarrow S = 26 (4 \times 26^2 - 1)/3 = 23436$$

6. Suma de los "n" números pares consecutivos

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Ejm. 9:

Hallar el valor de:

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + 40$$

$$S = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2 \times 20$$

$$n = 20$$

$$S = 20 (21) = 420.$$

$$M = 12+14+16+\dots+40$$

$$M = 20 (21) - 5 (6) = 390$$

7. Suma de cuadrados de los "n" primeros números pares consecutivos

$$\sum_{i=1}^n (2i)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

Ejm. 10:

Hallar el valor de:

$$M = 4 + 16 + 36 + \dots + 3600$$

$$M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 60^2$$

$$n = 30$$

$$M = \frac{2}{3} \times 30 (31) (61) = 37820$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. A las 8:00 am Luis y Verónica escuchan una noticia. Luis comunica esta noticia a dos de sus amigos, cada uno de los cuales lo comunica a otros dos caballeros y así sucesivamente. Verónica comunica la noticia a tres de sus amigas, cada una de las cuales lo comunica a otras tres damas y así sucesivamente.

Si cada persona demora 10

minutos en comunicar la noticia a sus oyentes.

¿Cuántos caballeros y cuántas damas conocerán esta noticia a las 9 am.?

Resolución

Haciendo el análisis tenemos que la cantidad de personas que se enteran de la noticia a las:

	8:00	8:10	8:20....	9:00
son	1 (L)	→ 2	→ 4	
		1 (V)	→ 3	→ 9

Como la noticia "corre" en progresión geométrica, la cantidad total de caballeros y damas que conocerán la noticia serán:

$$\Rightarrow S_{Cab} = 1 + 2 + 4 + \dots = 1 \times \left(\frac{2^7 - 1}{2 - 1} \right) = 127$$

$$\Rightarrow S_{Dam} = 1 + 3 + 9 + \dots = 1 \times \left(\frac{3^7 - 1}{3 - 1} \right) = 1093$$

2. Determinar la suma de cifras del resultado:

$$S = 1 + 3 + 5 + 11 + 33 + 55 + 111 + 333 + 555 + \dots$$

60 sumandos

Resolución

Agrupando de tres en tres, tenemos:

$$S = \underbrace{1+3+5}_{9} + \underbrace{11+33+55}_{99} + \underbrace{111+333+555}_{999} + \dots$$

$$S = \underbrace{9 + 99 + 999 + \dots}_{20}$$

$$S = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots$$

$$S = \underbrace{10+100+1000+\dots}_{20} - \underbrace{1-1-1-\dots-1}_{20}$$

Los términos de la serie del primer grupo aumentan geoméricamente, entonces:

$$S = 10 \times \frac{10^{20} - 1}{10 - 1} - 20$$

$$S = \frac{10^{21} - 10}{9} - 20$$

$$S = \frac{10^{21} - 190}{9} = \frac{\overbrace{999\dots9810}^{21 \text{ cifras}}}{9}$$

$$S = \underbrace{111\dots1090}_{21 \text{ cifras}}$$

$$\Rightarrow \text{Suma de cifras de "S"} = 18 + 9 = 27$$

3. Dada la sucesión:
1, 2, -3, 4, 5, -6, 7, 8, -9,
La suma de sus cien primeros términos es:

Resolución

Agrupándolos de tres en tres, tenemos:

$$S = 1+2-3 + 4+5-6 + 7+8-9 + \dots + 97+98-99 + 100$$

$$S = 0 + 3 + 6 + \dots + 96 + 100$$

$$S = 3.1 + 3.2 + \dots + 3.32 + 100$$

$$S = 3 \left(\frac{32.33}{2} \right) + 100$$

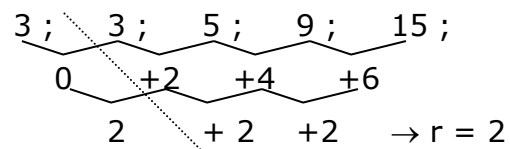
$$S = 1684$$

4. La suma de los 20 primeros términos de la serie:

$$3 + 5 + 9 + 15 + \dots \text{ es:}$$

Resolución

Para analizar los términos de la serie los ubicamos como una sucesión



→ la serie es cuadrática, donde el término general es de la forma:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

donde: $a = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 1$

$$b = m_0 - a = 0 - 1 \rightarrow b = -1$$

$$c = t_0 \rightarrow c = 3$$

Es decir:

$$t_n = n^2 - n + 3$$

$$\Rightarrow \underbrace{3+5+9+15+\dots}_{20 \text{ SUMANDOS}} = \sum_{n=1}^{20} (n^2 - n + 3)$$

$$= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - \frac{20 \cdot 21}{2} + 3 \cdot 20$$

$$= 2870 - 210 + 60 = 2720$$

5. Si: $0 < n < 1$; la suma de:
 $1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4 + \dots$
 es igual a:

Resolución

Dándole otra forma a la serie tenemos:

$$1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots \rightarrow S_1 = \frac{1}{1-n}$$

$$n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots \rightarrow S_2 = \frac{n}{1-n}$$

$$n^2 + n^3 + n^4 + \dots \rightarrow S_3 = \frac{n^2}{1-n}$$

$$n^3 + n^4 + \dots \rightarrow S_4 = \frac{n^3}{1-n}$$

$$n^4 + \dots \rightarrow S_5 = \frac{n^4}{1-n}$$

Entonces:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

$$S = \frac{1}{1-n} (1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots)$$

$$S = \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{1-n} = (1-n)^{-2}$$

6. En esta secuencia
 Fila 1: 1,2
 Fila 2: 2, 3, 4, 5, 6
 Fila 3: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
 Fila 4: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
 12, 13, 14
 ⋮
 ⋮

Hallar la suma de los números de la fila 32

Resolución

Proyectándonos a la fila 32, tenemos:

Fila 32 : 32, 33, 34, 35, ...,126

Que al sumarlos, obtenemos:

$$S = 32 + 33 + 34 + 35 + \dots + 126$$

$$S = \left(\frac{126+32}{2} \right) \cdot 95 = 7505$$

Fila	Nº términos		t_n	
1	$x3-1$	2	+0	2
2		5	+1	6
3		8	+2	10
4		11	+3	14

⋮				
⋮				
⋮				
32	$x3-1$	95		$\rightarrow 32+94 = 126$

7. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras que comienzan en 3 y son múltiplos de 3?

Resolución

$$S = 300 + 303 + 306 + 309 + \dots + 399$$

$$S = \frac{399+300}{2} \times \frac{399-297}{3}$$

$$S = \frac{699}{2} \times \frac{102}{3} = 11883$$

8. Calcular:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (3i^2 - 3i + 1)$$

Resolución

Aplicando propiedades de sumatorias, tenemos:

$$\sum_1^n (3i^2 - 3i + 1) = 3 \sum_1^n i^2 - 3 \sum_1^n i + \sum_1^n 1$$

$$= 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + 1 \cdot n$$

$$= \frac{n[(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 2]}{2}$$

$$= n^3$$

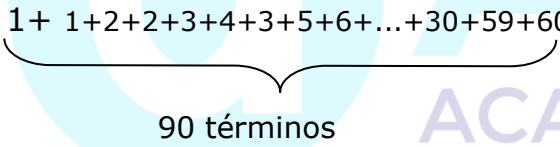
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN LA CLASE

1. Hallar:
 $E = 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 + \dots + 15 \times 30$
 Rpta:.....

2. La suma de los "n" primeros números naturales consecutivos, pares consecutivos e impares consecutivos es $31n + 6$. Hallar "n".

 Rpta:.....
3. Reducir:
 $E = 1 - 4 + 9 - 16 + \dots + 225$

 Rpta:.....
4. Hallar el valor de la siguiente serie:
 $S = 1 + 2 + 5 + 10 + 17 + \dots + 122$

 Rpta:.....
5. Hallar la siguiente suma:
 $E = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 5 + 6 + \dots + 30 + 59 + 60$

 Rpta:.....
6. Hallar el valor de "M" si:
 $M = 1/(1 \times 3) + 1/(3 \times 5) + 1/(5 \times 7) + \dots + 1/(19 \times 21)$
 Rpta:.....
7. En las series:
 $A = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 576$
 $B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 69$
 $C = 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + U$
 Hallar el valor de "U", para que se cumpla: $A = B + C$
 Rpta:.....
8. Mary y Mariela leen una novela de 3000 páginas; Mary lee 100 páginas diarias y Mariela lee 10 páginas en el primer día, 20 el segundo, 30 el tercero y así sucesivamente. Si ambas

comienzan a leer el 1ero de mayo, ¿en qué fecha llegarán a la misma página?

Rpta:.....

9. Calcular la suma de los números de la fila 30

Fila 1	1				
Fila 2	3	5			
Fila 3	5	7	9		
Fila 4	7	9	11	13	
Fila 5	9	11	13	15	17

Rpta:.....

10. Se deja caer una pelota desde una altura de 90 metros; si en cada rebote se eleva $1/3$ de la altura de la cual cayó por última vez, qué distancia recorrió la pelota hasta quedar en reposo?

Rpta:.....

11. Calcular: $\sum_{n=1}^{20} \left[\sum_{x=1}^n \left(\sum_{i=1}^x 2 \right) \right]$

Rpta:.....

12. Al sumar los cincuenta últimos números múltiplos de 4, que tengan 3 cifras, se obtiene:

Rpta:

13. Calcular $(m+n)$; si tanto en el numerador como en el denominador existe el mismo número de términos.

$$\frac{111 + 113 + 115 + \dots + m}{1 + 3 + 5 + \dots + n} = 11$$

Rpta:

14. Hallar la suma

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 60 \\ 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 60 \\ 3 + 4 + 5 + \dots + 60 \\ 4 + 5 + \dots + 60 \\ : \\ 60 \end{array}$$

Rpta:.....

ANÁLISIS COMBINATORIO

FACTORIAL : (L Ó !)

El factorial de un número entero y positivo se define como el producto de todos los enteros consecutivos que empiezan con la unidad y termina con el número dado.

Ejemplo 1:

$$6! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

$$4! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

EN GENERAL:

$$n! = n! = n (n-1) (n-2) (n-3) \dots (1)$$

*** POR CONVENCION:**

$$0! = 0! = 1$$

Ejemplo 2:

1. Calcular:

$$E = \frac{20! + 21! + 22!}{20! \times 22^2}$$

2. Hallar (a+b), si:

$$\frac{8!}{a! \times b!} = 56$$

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN (PRINCIPIO FUNDAMENTAL)

Si un evento "A" se puede realizar de "m" maneras y para cada una de estas, otro evento "B" se puede efectuar de "n" maneras, entonces los eventos A y B se pueden efectuar simultáneamente o uno seguido del otro, de:

"m x n" MANERAS.

* Este principio se puede generalizar para más de 2 sucesos

Ejemplo 3:

"Teresita" tiene 3 blusas diferentes, 4 faldas de diferentes modelos; de cuántas maneras diferentes se puede vestir.

Solución

Como cada falda puede ponerse con cada una de las blusas

→ Maneras de vestirse será

$$3 \times 4 = 12$$

PRINCIPIO DE ADICION

Si un evento "A" ocurre o se puede efectuar de "m" maneras y otro evento "B" se puede efectuar de "n" maneras, entonces "A" ó "B", se puede efectuar de:

"m + n" MANERAS.

Ejemplo 4

"Katy" desea viajar de Lima a Cajamarca; si dispone de 4 líneas aéreas y 2 líneas terrestres ¿de cuántas maneras diferentes puede realizar el viaje?

Solución:

Para viajar de Lima a Cajamarca, puede hacerlo por línea aérea (4 maneras) o por línea terrestre (2 maneras).

Maneras de viajar: $4 + 2 = 6$

VARIACIÓN (v)

Es cada uno de los diversos ordenamientos que pueden formarse tomando alguno o todos, de un número dado de objetos y teniendo en cuenta el orden en que se toman estos.

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

n = número total de elementos

r = número de elementos tomados (agrupados)

Ejemplo 5:

Cuántas variaciones se pueden obtener con los elementos a,b,c,d,e tomados de 2 en 2.

Solución

* Tener presente que si interesa el orden de colocación de cada elemento, es decir que:
 $ab \neq ba$

Entonces, las variaciones serán

$$\left. \begin{array}{l} ab, ac, ad, ae \\ ba, bc, bd, be \\ ca, cb, cd, ce \\ da, db, dc, de \\ ea, eb, ec, ed \end{array} \right\} = 20 V$$

Matemáticamente designaremos la variación para "n" elementos tomados de r en r, por:

$$V_r^n = n (n-1) (n-2) \dots (r \text{ factores})$$

$$V_2^5 = 5 \times 4 = 20$$

o también aplicando:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow V_2^5 = \frac{5!}{3!} = 20$$

Ejemplo 6:

En una competencia, en la que participarán 5 atletas, se entregarán medallas de oro, plata y bronce a los 3 primeros en llegar a la meta. Si llegasen, uno a continuación del otro, de cuántas maneras se puede efectuar la premiación?.

Solución

PERMUTACIÓN (P):

Si se toma todos los elementos del conjunto para ordenarlos, la variación recibe el nombre de permutación es decir si: $v = n$

$$\rightarrow \boxed{V_n^n = P_n = n!}$$

Ejemplo 7

¿Cuántas permutaciones se obtienen con los elementos 1,2,3?

Solución

Al tomar todos los elementos para ordenarlos, tenemos:

$$\left. \begin{array}{ll} 123 & 132 \\ 213 & 231 \\ \text{permutaciones} & \\ 312 & 321 \end{array} \right\} \Rightarrow 6$$

$$P_3 = 3! = 6$$

Ejemplo 8

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 personas en una fila?

Solución:.....

PERMUTACIÓN CIRCULAR (Pc)

Cuando "n" elementos se disponen alrededor de un círculo, el número de permutaciones, si se cuenta siempre en el mismo sentido a partir de un mismo elemento, será:

$$\boxed{P_c^n = (n-1)!}$$

Ejemplo 9

¿De cuántas maneras pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución:

$$P_7 = 7! = 5040$$

Ejemplo 10:

¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una fogata?

Solución:

.....

PERMUTACIÓN CON REPETICION

Si se tiene n elementos donde hay:
 r_1 = elementos de una primera clase
 r_2 = elementos de una segunda clase
 r_3 = elementos de una tercera clase
 r_k = elementos de una k - ésima clase

El numero de permutaciones diferentes que se puede formar con ellos es:

$$P_n^{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \dots \times r_k!}$$

Donde: $r_1 + r_2 + \dots + r_k \leq n$

Ejemplo 11

Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar con las letras de la palabra MENEM.

Solución

En la palabra encontraremos 5 letras de las cuales se repiten las letras E y M, es decir:

$n = 5; r_1 = 2; r_2 = 2$

Entonces

$$P_n^{r_1, r_2} = \frac{n!}{r_1! \times r_2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$$

Ejemplo 12:

En cuántas formas se pueden ordenar los siguientes cubos:
 2 rojos, 3 verdes y 2 azules

Solución

En total hay 7 cubos para ordenarlos uno a continuación de otro; pero se repiten los colores, por lo que los ordenamientos distintos serán:

$$P_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

COMBINACIÓN (C)

Es cada uno de todos los ordenamientos que pueden formarse, tomando todos los elementos o grupos

de estos, no importando el orden en que se tomen estos.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

n = Número total de elementos
 r = Número de elementos tomados (agrupados)

Ejemplo 13

Se desean saber cuántas combinaciones se puedan realizar con los elementos a,b,c,d,e tomados de 2 en 2.

Solución

Tener en cuenta que no interesa el orden de ubicación de los elemento, es decir que: $ab = ba$, entonces las combinaciones serán:

ab ac ad ae } = 10
 bc bd be
 cd ce
 de

Ejemplo 14

¿Cuántos comités de 4 personas se pueden formar con un grupo de 6 personas?

Solución:

OBSERVACIONES

1. $C_0^n = 1 \quad C_1^n = n \quad C_n^n = 1$
2. $C_r^n = C_{n-r}^n$
3. **(C. Complementarias)**
 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$

$$C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

DIFERENCIA ENTRE COMBINACIONES Y VARIACIONES

Las combinaciones se diferencian por sus elementos; en tanto que las variaciones por el orden de los mismos.

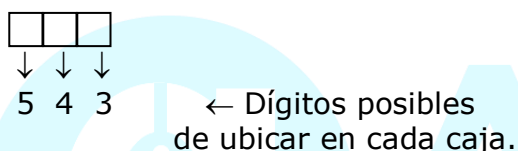
- Para las variaciones el orden de sus elementos si interesa, ya que no es lo mismo decir 23 que 32.
- Para las combinaciones el orden no interesa.
- Dos combinaciones son diferentes sólo si difieren por lo menos en un elemento: abc; abd; bcd; acd.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con 5 dígitos sin que se repita uno de ellos en el número formado

Resolución:

Aplicando el método de las cajas:



N° de maneras = $5 \times 4 \times 3 = 60$

- * Aplicando análisis combinatorio:

Como si nos interesa el orden:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$V_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

2. De cuántas maneras distintas pueden sentarse en una banca de 6 asientos 4 personas.

Resolución

Interesa el orden en que están sentados

→ maneras = $V_4^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

3. Un estudiante tiene que resolver 10 preguntas de 13 en un

examen. ¿Cuántas maneras de escoger las preguntas tiene?

Resolución

Se tiene que escoger 10 preguntas, sin interesar el orden; entonces:

$$\text{Maneras} = C_{10}^{13} = \frac{13!}{10! \times 3!} = 286$$

4. De cuántas maneras 2 peruanos, 4 colombianos y 3 paraguayos pueden sentarse en fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

Resolución

- Las tres nacionalidades pueden ordenarse en una fila de 3! maneras.
- Los dos peruanos pueden sentarse de 2!
- Los cuatro colombianos de 4!
- Los tres paraguayos de 3!

∴ Hay $3! \times 2! \times 4! \times 3! = 1728$ maneras

5. De cuántas maneras pueden escogerse un comité compuesto de 3 hombres y 2 mujeres de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres.

Resolución

- * De los 7 hombres se puede escoger 3 de C_3^7 maneras
- * De las 5 mujeres se puede escoger 2 de C_2^5 maneras
- ∴ El comité puede escogerse de: $C_3^7 \times C_2^5 = 350$ maneras

6. Un total de 120 estrechados de manos se efectuaron al final de una fiesta. Suponiendo que cada uno de los participantes es cortés con cada uno de los demás, cuál es el número de personas presentes?

Resolución

Del total de personas (n) se saludan de 2 en 2; sin interesar el orden, entonces:

$$C_2^n = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 120$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 120$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 120$$

$$\Rightarrow n = 16$$

EJERCICIOS

1. Señale cuántos números mayores que 800 y menores que 900 pueden formarse con los números 2,3,5,8 y 9.

Rpta.:

2. De cuántas formas se puede ubicar 6 niños en una fila, si dos de ellos deben estar siempre juntos.

Rpta.:

3. Con 7 consonantes y 4 vocales, cuántas palabras pueden formarse que contengan cada una 3 consonantes y 2 vocales?

Rpta.:

4. Con las frutas: piña, manzana, papaya y naranja, cuántos jugos de diferentes sabor se podrá hacer?

Rpta.:

5. Se tiene una urna con cinco bolas numeradas, de cuantas maneras se puede extraer por lo menos una bola?

Rpta.:

6. La mamá de Ruth tiene 2 manzanas y 3 peras. Cada día durante 5 días seguidos, da a su hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede efectuarse esto?

Rpta.:

7. Con 6 colores diferentes, ¿Cuántas banderas tricolor se pueden formar?

Rpta.:

8. Un edificio tiene 7 oficinas. ¿Cuántos cables de conexión son necesarios para comunicar dos de dichas oficinas?

Rpta.:

9. ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes y que terminan en R se pueden obtener cambiando de lugar las letras de la palabra CANTOR?

Rpta.:

10. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 8 camisas diferentes entre 4 personas?

Rpta.:

11. De Lima a Trujillo hay 7 buses diferentes. ¿De cuántas maneras se puede ir a Trujillo y regresar en un bus diferente?

Rpta.:

12. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una terna, siendo 8 los candidatos?

Rpta.:

13. Se tienen 4 libros diferentes de Geometría y 3 libros diferentes de Química. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en 7

- casilleros, si los de química deben ir juntos?
Rpta.:
14. Tres personas llegan a un lugar donde hay 5 hoteles. ¿De cuántas maneras diferentes podrán ubicarse en hoteles diferentes?
Rpta.:
15. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden obtener con las letras de la palabra COCOROCO, sin importar si tienen o no sentido las palabras?
Rpta.:
16. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras cada una, sin que ninguna se repita, se puede formar con las cifras: 1,2,3,4,5,6,7, de tal manera que todos empiecen con 2 y acaben con 1?
Rpta.:
17. ¿Cuántas sumas diferentes de 3 sumandos cada una, se pueden obtener con los números: 1, 3, 5, 11, 21, 41?
Rpta.:
18. En una biblioteca hay 5 textos de Física, 4 de Química y 5 de Estadística. Se desea sacar 3 textos de Física, 2 de Química y 4 de Estadística. ¿Cuántas selecciones diferentes se pueden hacer?
Rpta.:
19. ¿En cuántas formas se pueden ordenar las siguientes fichas: 3 rojas, 2 azules y 2 blancas?
Rpta.:
20. Con las cifras 1; 3; 4; 6; 7 y 9. ¿Cuántos números mayores de 5000 y de 4 dígitos no repetidos podemos formar?
Rpta.:
21. En una oficina hay 4 escritorios que pueden ser ocupados cada uno hasta por dos personas; si hay 3 secretarias de cuántas maneras pueden sentarse?
Rpta.:
22. Si un conjunto tiene 4 elementos cuántos subconjuntos con más de un elemento se puede formar?
Rpta.:
23. Se tiene los siguientes libros:
- cuatro libros de Matemática;
- seis libros de Física y
- tres libros de Química;
todos los libros pertenecen a diferentes autores. De cuántas maneras se podrán ordenar 6 libros en un estante, si se escogen 3 de Matemáticas, 2 de Física y uno de Química? NOTA: Los libros de un mismo curso deben ir juntos.
Rpta.:
24. Un inspector visita 6 máquinas diferentes durante el día. A fin de impedir que los operadores sepan el momento de la visita, varía el orden. ¿De cuántas maneras puede hacer las visitas?
Rpta.:

PROBABILIDADES

El cálculo de probabilidades es una tarea que sirve de modelo para la descripción y análisis de fenómenos estadísticos. La teoría de probabilidades es de trascendental importancia en las matemáticas, pues tiene una aplicación directa en muchos problemas de ingeniería, administración, economía, etc, donde es necesario tomar decisiones sobre la incertidumbre o lo relativo en base a datos estadísticos.

Ejm:

¿Cuál es la probabilidad de que un producto nuevo sea aceptado en el mercado?

EXPERIMENTO ALEATORIO (ϵ)

Se denomina experimento aleatorio a toda prueba o ensayo cuyos resultados no son predecibles sin haberse realizado previamente la prueba.

EJEMPLOS

ϵ_1 : Se lanza una moneda dos veces
y se observa los resultados posibles

ϵ_2 : Se lanza un dado y se observa el número que resulta

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.

Para los ejemplos antes mencionados:

$$\Omega_1 = \{(c,c); (c,s); (s,c); (s,s)\}$$

$$\Omega_2 = \{(1;2;3;4;5;6)\}$$

EVENTOS O SUCESOS:

Un evento o suceso son subconjuntos de un espacio muestral. Se denota generalmente por letras mayúsculas del alfabeto (A; B; ...).

Del ejemplo 1 antes mencionado, sea el evento

A = en los 2 lanzamientos sale un cara, por lo menos

$$A = \{(c,c); (c,s); (s,c)\}$$

OPERACIONES ENTRE SUCESOS:

Se han indicado anteriormente que los sucesos son conjuntos y como tales cumplen todas las operaciones de los mismos.

Operación Se lee:

$A \cup B$: Ocurre A, ocurre B o ambas
Ocurre al menos uno de ellos.

$A \cap B$: Ocurre A y ocurre B;
Ocurre ambas a la vez

$A - B$: Ocurre solamente A;
Ocurre A pero no B

A^c : No ocurre el suceso A.

**CLASES DE SUCESOS
PROBABILISTICOS***** SUCESOS MUTUAMENTE
EXCLUYENTES:**

Dados los sucesos A y B se dice que ellos son mutuamente excluyentes si y sólo si $A \cap B = \phi$; esto quiere decir que no ocurren juntos (simultáneamente).

Ejemplo:

En una aula de Pre UNAC, se tiene los siguientes sucesos:

A: Un grupo de alumnos tienen de 15 a 17 años

B: Un grupo de alumnos tienen más de 17 años pero no más de 19 años

C: Un grupo de alumnos son mayores de 19 años.

⇒ Si se elige a un alumno, este pertenecerá a alguno de los tres grupos.

*** SUCESOS COMPATIBLES**

Aquellos que pueden presentarse simultáneamente.

Ejemplo:

Lanzar dos dados y que aparezcan un dos o un cinco.

*** SUCESOS INDEPENDIENTES:**

Dados los sucesos A y B se dice que ellos son independientes si la ocurrencia de A no afecta el hecho de que ocurra simultánea o sucesivamente B; es decir, que la ocurrencia de uno de ellos no depende de la ocurrencia del otro.

Ejemplo:

Se lanza un dado 2 veces

D: Sale 3 en el primer lanzamiento

E: Sale 3 en el segundo lanzamiento.

*** SUCESOS DEPENDIENTES**

Cuando la ocurrencia de uno de ellos depende de la ocurrencia del otro.

Ejemplo:

Se tiene dos urnas A y B, la urna A contiene 3 bolas rojas y 4 bolas negras, en tanto que la urna B tiene 4 bolas rojas y 7 bolas negras. Si se saca de la urna A una bola y se deposita en la urna B; al sacar una bola de la urna B, el resultado dependerá de la bola que se sacó de la urna A.

* DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD. (Definición Clásica).

Si A es un suceso de un espacio muestral Ω , entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota $P_{(A)}$ y está dado por la relación:

$$P_{(A)} = \frac{\text{Número de resultados favorables al suceso A}}{\text{Número de resultados posibles de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Ejm 1:

Determinar la probabilidad de que al lanzar un dado, el resultado sea un número primo.

Solución

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{2,3,5\}$$

$$\rightarrow P(A) = 3/6 = 1/2$$

En forma general para "n" dados se cumple que

$$N^{\circ} \text{ casos totales} = 6^n$$

→ Cuando se lanzan dos dados simultáneamente, aumenta la diversidad de eventos que puedan ocurrir, esto es:

$$6^2 = 36 \text{ casos en total}$$

Los eventos más frecuentes, son aquellos que involucran a la SUMA de los números que aparecen en sus caras superiores.

CUADRO de las SUMAS que se OBTIENEN al LANZAR DOS DADOS:

		Dado 2					
Dado 1 ↓		1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12

De este cuadro se deduce que:

- * SUMA MAS PROBABLE que salga es el 7 y su probabilidad es de 6/36.
- * SUMAS MENOS PROBABLES son el 2 y el 12 y su respectiva probabilidad es de 1/36, para cada uno.

Resumen del cuadro de Sumas:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº de casos	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejm. 2:

¿Cuál es la probabilidad que al lanzar dos dados, su suma sea un múltiplo de 3?

Solución:

Para que sea múltiplo de 3, la suma debe ser 3,6,9 o 12, siendo los casos favorables de 2,5,4 y 1 respectivamente, que en total hacen $2+5+4+1$, igual a 12 casos favorables, con respecto a 36 casos en total.

Por lo tanto, la probabilidad será:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Para el caso de NAIPES:

Debemos saber que el mazo consta de 52 cartas:

- palo de 13 cartas de corazones (♥)
- palo e 13 cartas de diamantes (♦)
- palo de 13 cartas de Tréboles (♣)
- palo de 13 cartas de Espadas (♠)

Ejm 3:

De un mazo de 52 cartas, al extraer una de ellas ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as?

Solución:

Como en un mazo de 52 cartas hay 4 ases, entonces la probabilidad será:

$$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Para el caso de MONEDAS:

Una moneda tiene una CARA y un SELLO, es decir, cada moneda tiene dos casos totales.

En general, para "n" monedas, se cumple que:

$$N^{\circ} \text{ de casos totales} = 2^n$$

Deducción sencilla: en cada MONEDA, se cumple que:

Probabilidad para obtener CARA = $\frac{1}{2}$

Probabilidad para obtener SELLO = $\frac{1}{2}$

AXIOMAS DE PROBABILIDADES

1. Si A es un suceso definido en el espacio muestral (Ω) entonces:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad ; \quad 0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

2. Al espacio muestral (Ω) le corresponde $P(\Omega) = 1$

* La probabilidad será 1 cuando el suceso sea seguro.

* La probabilidad será cero cuando el suceso sea imposible

TEOREMA DE LA ADICIÓN:

Si A y B son sucesos no excluyentes definidos en un espacio muestral, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes $A \cap B = \phi$; $P_{(A \cap B)} = 0$

$$P_{(A \cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$$

TEOREMA DE LA MULTIPLICACION

Sean A y B dos sucesos incluidos en el espacio muestral Ω , entonces:

- Si A y B son sucesos no independientes

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} \times P_{(B/A)}$$

Ejm. 4:

Una urna contiene 6 bolitas azules y 4 blancas. Se extraen dos bolitas sucesivamente y sin reposición. Calcular la probabilidad que la primera sea blanca y la segunda azul.

Solución

$$P_{(b \cap a)} = P_{(b)} \times P_{(a/b)}$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

- Si A y B son independientes

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} \times P_{(B)}$$

Ejm. 5:

Una urna contiene 6 bolitas azules y 4 blancas. Se extraen dos bolitas sucesivamente, con reposición. Calcular la probabilidad que la primera sea azul y la segunda blanca.

Solución:

$$P_{(a \text{ y } b)} = P_{(a)} \times P_{(b)}$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$$

EXTRACCIÓN SIMPLE

Para naipes, bolas y otras, cuando se quiere extraer de una en una, la probabilidad se determina por un simple cociente de los casos favorables respecto a los casos totales.

Ejm. 6:

De una caja que contiene 5 bolas rojas y 3 negras, se extrae uno de ellos al azar. Determinar la probabilidad que sea negra.

Solución

$$n(\Omega) = 8$$

$$n(N) = 3 \Rightarrow P_{(N)} = 3/8$$

EXTRACCIÓN MÚLTIPLE

Cuando se extraen DOS o más objetos, se puede hallar la Probabilidad por dos métodos.

a) MÉTODO DE LA FRACCIÓN

Hacer el PRODUCTO de tantas fracciones como EXTRACCIONES se hayan realizado.

Nº de Fracciones = Nº de Extracciones

Ejm. 7:

De un mazo de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer tres al azar, éstas sean una figura (J, Q, K)?

Solución:

En un mazo de 52 cartas existen 4 cartas "J", 4 cartas "Q" y 4 cartas "K", entonces tendremos 12 cartas favorables que se van a extraer de una en una.

La probabilidad de la primera será: $\frac{12}{52}$

La probabilidad de la segunda será: $\frac{11}{51}$, ya que hay una figura menos.

La probabilidad de la tercera será $\frac{10}{50}$

La probabilidad respuesta será el producto: $\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{10}{50}$

b) MÉTODO DE LAS COMBINACIONES

Cuando se extraen varios objetos, se cumple que la "Probabilidad de la Extracción Múltiple equivale a un COCIENTE de COMBINACIONES". Se debe aplicar una COMBINACIÓN, tanto a los CASOS FAVORABLES como a los CASOS TOTALES.

$$P(k) = \frac{C_r^k}{C_r^n}$$

Siendo:

K = Número de casos favorables que se extraen al azar de "r" en "r" (r>1)

M = Número de casos totales, que se extraen al azar de "r" en "r".

Ejm. 8:

De un mazo, se extraen 2 cartas ¿Cuál es la probabilidad que sean espadas?

Solución:

Como en un mazo de 52 cartas hay 13 espadas, por el método de las combinaciones, tenemos que:

La probabilidad será:

$$C_2^{13} / C_2^{52} = \frac{1}{17}$$

Ejm. 9:

En una urna se tiene 4 bolas negras, 5 blancas y 7 verdes. Al extraer tres de ellas, ¿Cuál es la probabilidad que sean negras?

Solución:

La probabilidad será de

$$C_3^4 / C_3^{16} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1}{140}$$

Ejm. 10:

Se tienen 10 objetos buenos, 4 dañados y otros 2 con daños importantes. ¿Cuál es la probabilidad que al sacar 2 objetos al azar, éstos sean buenos?.

Solución:

En total son: 10+4+2 = 16 objetos en total

Por el método de las fracciones, será:

$$\frac{10}{16} \times \frac{9}{15} = \frac{3}{8}$$

Por el método de las combinaciones:

$$\frac{C_2^{10}}{C_2^{16}} = \frac{10 \cdot 9}{16 \cdot 15} = \frac{3}{8}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determina la probabilidad de realizar el siguiente suceso: "Obtener cara por lo menos 2 veces al lanzar al aire 3 veces una moneda"

Solución:

Si lanzamos por vez primera, puede que resulte cara y si no cae cara tiene que ser sello; luego si lanzamos la moneda por 2da vez y después por 3ra vez se presentarán las ocurrencias que ilustramos en el diagrama adjunto.

LANZAMIENTO DE LA MONEDA		
1 vez	2 veces	3 veces
C	CC	CCC
		CCS
		CSC
	CS	CSS
		SCC
		SCS
S	SS	SSC
		SSS

Como nos piden hallar la probabilidad de sacar por lo menos 2 caras, esto es 2 o más caras, entonces las caras favorables que observamos en la tercera columna son: ccc, ccs, csc y scc, siendo 4 posibilidades de un total de 8, luego:

$$P_{(\text{por lo menos 2 caras})} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

2. En una caja hay 5 bolas rojas y 3 negras. Sin mirar se saca una bola y no se devuelve a la caja, luego se saca otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que se sacaron sean rojas?

Solución:

La probabilidad de sacar una bola roja la primera vez es de: $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$, y la probabilidad de sacar una bola roja la segunda vez es de: $\frac{5-1}{8-1} = \frac{4}{7}$.

Como la ocurrencia de los sucesos están ligadas mutuamente, aplicamos el teorema dado:

$$P_{(R \text{ y } R)} = P_{(R)} + P_{(R)} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

3. Se escogen al azar 4 naranjas entre 10 naranjas que habían en una caja, de las cuales 6 estaban malogradas, ¿Cuál es la probabilidad de que 2 exactamente sean malogradas?

Solución:

Según los datos se tiene:

Total de naranjas: 10 $\left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ malogrados} \\ 4 \text{ sanos} \end{array} \right.$

a) Si se extraen 4 naranjas del total de naranjas (10), entonces el número de maneras se obtendrá:

$$C_4^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210 \text{ maneras}$$

b) Si se extraen 4 naranjas, donde dos naranjas deben ser malogradas entonces los otros dos serán sanas.

El conjunto de casos posibles de extraer dos naranjas malogradas de los 6 y 2 sanas de los 4 será.

$$C_2^6 \times C_2^4 = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 90 \text{ maneras}$$

∴ la probabilidad es de:

$$P_{(A)} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

4. Un profesor de aula ha seleccionado a 10 niños y 4 niñas para recitar 3 poesías para actuación central del aniversario del plante. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros sean niños y la última sea niña?

Solución:

Según los datos el total de alumnos seleccionados son:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \text{ niños} \\ 4 \text{ niños} \end{array} \right\} 14 \text{ alumnos}$$

Determinando las probabilidades tenemos:

$$\text{Que el primero sea niño: } \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\text{Que el segundo sea niño: } \frac{9}{13}$$

$$\text{Que el tercero sea niña: } \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Como los tres eventos son independientes uno del otro, la probabilidad final será:

$$P_{(F)} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{91}$$

5. Nueve personas se sientan al azar en una mesa redonda. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 personas queden contiguas?

Solución:

Sean A, B y C las personas que van a sentarse siempre juntas o contiguas, entonces:

Calculamos el número total de formas en que se puedan sentar las 9 personas: $(9-1)! = 8!$

Si las 3 personas (A, B y C), siempre están juntos, entonces las formas que se pueden ubicar es:

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ formas}$$

Las 6 personas restantes se podrán ubicar de:

$$6! \text{ formas}$$

Finalmente la probabilidad $(P_{(A)})$ de que las tres personas queden contiguas es:

$$(P_{(A)}) = \frac{6 \times 6!}{8!} = \frac{6 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{3}{28}$$

EJERCICIOS

1. Se tiene una baraja de 52 cartas y de ellas se extrae una. Hallar la probabilidad de que la carta extraída:

- a. Sea una reina de "oros"
- b. Sea un As
- c. Sea de figura negra
- d. Represente su valor con un número

2. ¿Cuál es la probabilidad que al lanzar 3 veces una moneda se obtenga:

- a. 2 caras y un sello
- b. Por lo menos 2 veces cara
- c. Caras únicamente
- d. A lo sumo 2 veces sello

Además, hallar la probabilidad que:

- e. 2 caras no aparezcan consecutivamente
- f. Todos los resultados no sean iguales
- g. No se obtengan 3 sellos

3. Se va a seleccionar un comité de 5 hombres, a partir de un grupo de 8 norteamericanos, 5 ingleses y 3 franceses. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté compuesto por 2 norteamericanos, 2 ingleses y 1 francés?

Rpta.:

4. Se lanza un par de dados. Si la suma es 6, ¿Hallar la probabilidad de que uno de los dados sea dos ?.

Rpta.:

5. Una caja contiene 4 bolas rojas, 3 bolas blancas y 2 bolas azules. Si se extraen 3 bolas al azar, determinar la probabilidad de que:

- a. Las 3 bolas sean rojas
- b. 2 sean rojas y 1 sea blanca
- c. Las 3 bolas sean blancas
- d. Salga una de cada color

Dar como respuesta la suma de dichos resultados

Rpta.:

6. Se lanza una moneda cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan todos iguales?

Rpta.:

7. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la suma 7 u 11 en el lanzamiento de dos dados?

Rpta.:

8. De una baraja de 52 cartas se sacan tres naipes. Determinar las probabilidades siguientes:

- a. Que todos sean ases.
- b. Que todos sean tréboles
- c. Que todos sean del mismo palo

Rpta.:

FIGURAS

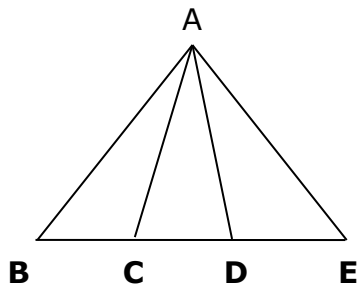
La facultad de observación y percepción de cambios en muchas situaciones visuales está unida con la lógica y la memoria. Es necesario por eso, plantearse este tipo de situaciones, tales como las que aparecen en esta lista preliminar:

- Comparar dos objetos para notar si son idénticos
- Encontrar un objeto oculto, basándose en un modelo.
- Enumerar y contar el conjunto de objetos observados
- Descubrir el trazo de un recorrido oculto.
- Elegir un recorrido óptimo entre varias rutas disponibles, etc.

Para algunos de estos problemas se dispone de ciertos métodos sistemáticos o algunas fórmulas pre establecidas, mientras que para otros sólo podemos contar con nuestra intuición e imaginación para obtener la solución. Haremos entonces un estudio por separado de los casos que se conocen.

II. CONTEO DE FIGURAS

Ejemplo 1: ¿Cuántos triángulos se pueden observar en la figura?

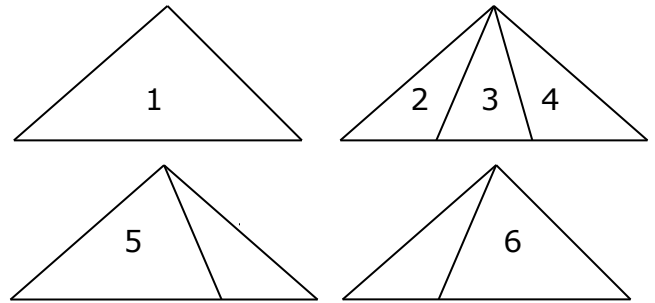


Resolución:

Podemos contar de dos formas:

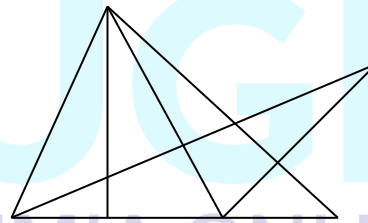
1. Si utilizamos los vértices para identificarlos tendremos los siguientes triángulos:
 ABE, ABC, ACD, ADE, ABD y ACE
 = **6 triángulos**

2. Si sólo observamos y utilizamos nuestra memoria registramos estas imágenes:



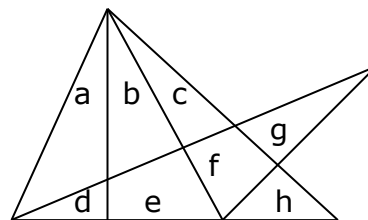
Los números indican los 6 triángulos reconocidos.

Ejemplo 2: ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



Resolución:

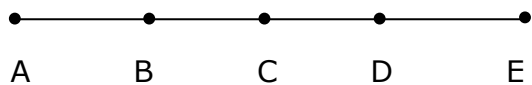
Asignándole letras a las figuras más pequeñas



Tenemos que la cantidad de triángulos buscados son:

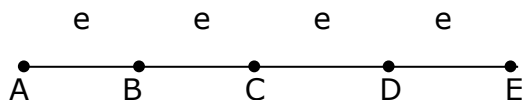
con 1 letra { a, b, c, d, g, h }	6
2 letras { ab; bc; ad; be; cf; de; fg }	7
3 letras { abc; cfh }	2
4 letras { abde; defg; defh }	3
5 letras { bcefh }	1
7 letras { abcdefh }	1
⇒ Total =	20

Ejemplo 3: ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?



Resolución :

Si asignamos a cada uno de los pequeños segmentos una letra (e), tenemos:



- Con 1 letra: 4 segmentos
- Con 2 letras: 3 segmentos
- Con 3 letras: 2 segmentos
- Con 4 letras: 1 segmento.

Total de segmentos:

$$S = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

ó

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Sumando miembro a miembro:

$$2 S = 5+5+5+5 = 20$$

Es decir que para 4 "e", tenemos:

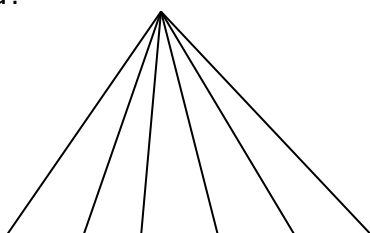
$$S = \frac{4(5)}{2} = 10$$

Generalizando, para "n" espacios, tenemos

$$\text{N}^\circ \text{ Seg.} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nota: Esta expresión matemática podemos aplicarla a otras figuras, siempre y cuando cada segmento genere la figura pedida.

Ejemplo 4: Cuántos triángulos hay en la figura?

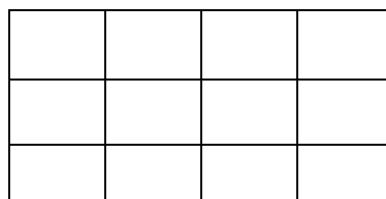


Resolución:

Observamos que cada uno de los segmentos, en la base del triángulo, genera a su vez una figura pedida. Entonces, para $n = 5$

$$\text{N}^\circ \text{ triángulos} = \frac{5(6)}{2} = 15$$

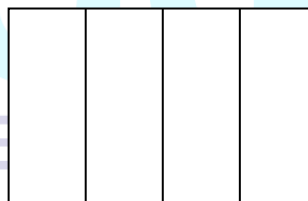
Ejemplo 5: Cuántos cuadriláteros hay en la figura?



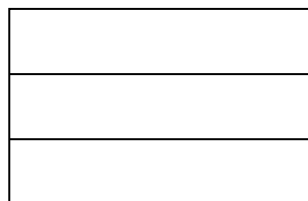
Resolución:

Calcularemos primero los cuadriláteros que habrían sin las líneas horizontales interiores y luego los cuadriláteros que habrían sin las líneas verticales interiores.

Es decir:



$$\text{N}^\circ \text{ de cuadriláteros} = \frac{4(5)}{2} = 10$$



$$\text{N}^\circ \text{ de cuadriláteros} = \frac{3(4)}{2} = 6$$

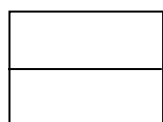
Luego, al superponerlos, se multiplican

$$\Rightarrow \text{N}^\circ \text{ cuadriláteros} = 10 \times 6 = 60$$

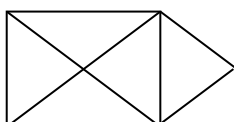
II. FIGURAS DE TRAZO CONTINUO

Es posible dibujar algunas figuras con trazo continuo, esto es, sin recorrer dos veces la misma línea y sin levantar el lápiz del papel. Con otros resulta imposible hacerlo.

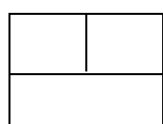
Ejemplo 6: ¿Cuáles de las figuras siguientes se puede dibujar con un solo trazo?



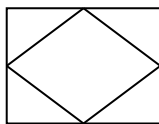
a



b



c



d

Sólo las figuras a, b y d se pueden dibujar de un solo trazo.

La figura "c" es imposible trazarla, a menos que se repita un segmento.

* Las razones se basan en una teoría que se conoce desde la época de **Leonard Euler** (1759) y de la cual extraemos algunos principios.

- Para que una figura se pueda dibujar de un solo trazo; es decir, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ninguna línea, es necesario estar en alguno de los siguientes casos:

Caso I: Todos los vértices de la figura dada deben ser pares; entendiéndose como vértice par aquel punto o nudo donde concurren un número par de líneas.

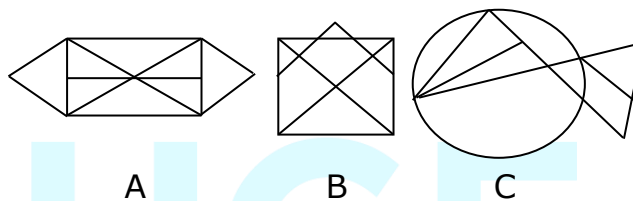
La trayectoria del trazo debe iniciarse en alguno de los vértices y concluir en el mismo.

Caso II: La figura debe tener sólo dos vértices impares.

La trayectoria del trazo debe iniciarse en uno de los vértices impares y concluir en el otro vértice impar.

- Cualquier otra situación diferente a los dos casos, no da lugar a realizar la figura de un solo trazo.
- Si deseamos dibujar de un solo trazo, una figura con mas de dos vértices impares, repetiremos como mínimo $\frac{i-2}{2}$ líneas; donde "i" es el número de vértices impares.

Ejemplo 7: ¿Cuáles de las siguientes figuras, se pueden graficar de un trazo, sin levantar el lápiz, ni pasar dos veces por la misma línea?



Ejemplo 8: Como mínimo una araña emplea 5 minutos en recorrer todas las aristas de un cubo construido de alambre de 60 cms. de longitud. ¿Cuál es el tiempo que emplea en recorrer una arista?

Resolución:

Para emplear el mínimo tiempo en recorrer una arista, la araña debe iniciar un recorrido en uno de los vértices. Debido a que los 8 vértices son impares no podrá hacer el recorrido sin repetir algunos de ellos.

⇒ el mínimo de aristas que repite en su recorrido será:

$$\frac{8-2}{2} = 3$$

∴ recorrió: 12 + 3 = 15 aristas

Resolviendo por regla de tres simple, tenemos:

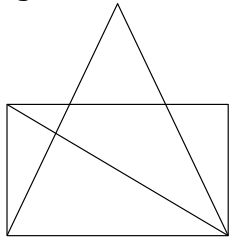
15 aristas → 5 min < > 300 seg.

1 arista → x

$$x = \frac{1 \times 300}{15} = \mathbf{20 \text{ seg}}$$

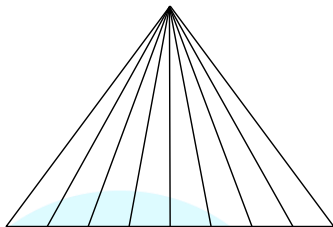
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Calcular el número de triángulos en la figura



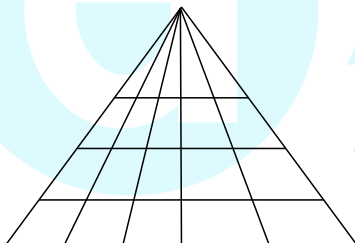
Rpta.

2.



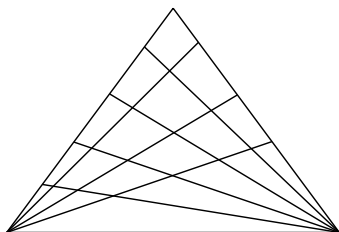
Rpta.

3.



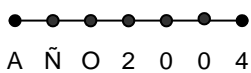
Rpta.

4.



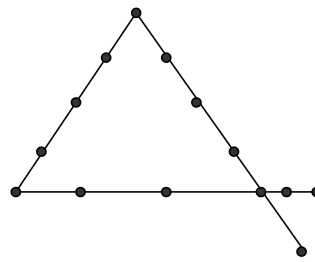
Rpta.

5. Calcule el número de segmentos



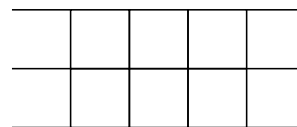
Rpta.

6.



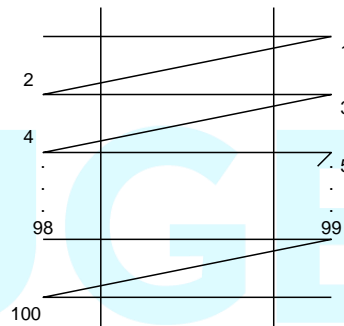
Rpta.

7.



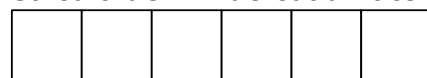
Rpta.

8.



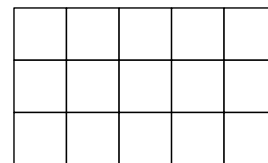
Rpta.

9. Calculo del N° de cuadriláteros



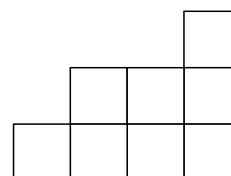
Rpta.

10.



Rpta.

11.



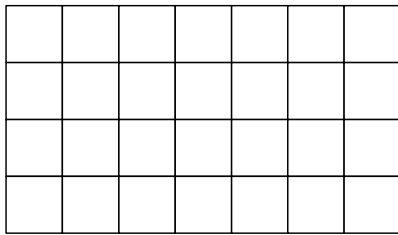
Rpta.

12. ¿Cuántos cuadrados se pueden contar como máximo en un tablero de ajedrez?

Rpta.

13. ¿Cuántos cuadrados se:

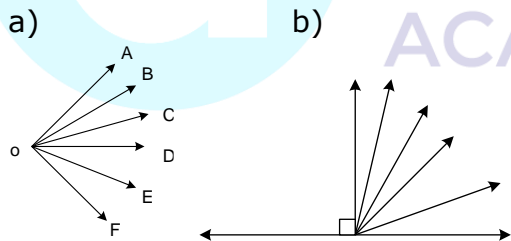
c) Observan en la siguiente figura



d) ¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados hay en la figura?

Rpta.

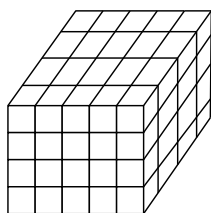
14. ¿Cuántos agudos se pueden contar en las siguientes figuras?



Dar como respuesta "a + b"

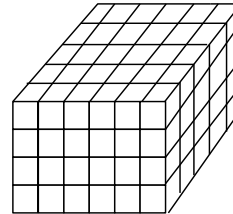
Rpta.

15. ¿Cuántos cubos como máximo hay en el siguiente sólido?



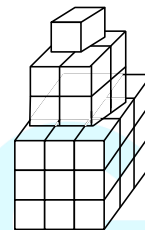
Rpta.

16. ¿Cuántos cubos se contarán como máximo en el siguiente sólido?



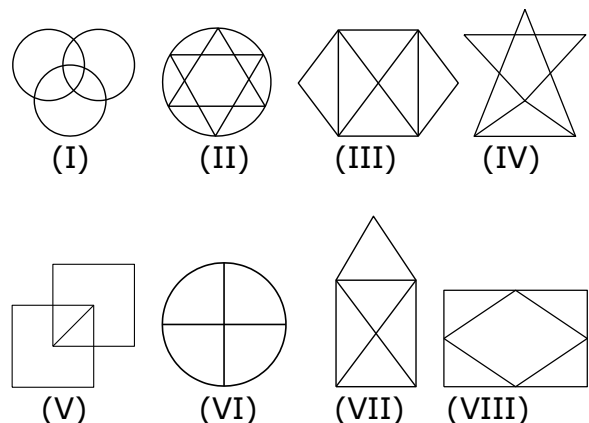
Rpta.

17. Para esta torre de 3 pisos se han utilizado 36 cubos. ¿Cuántos cubos serán necesarios para construir una torre similar de 20 pisos?



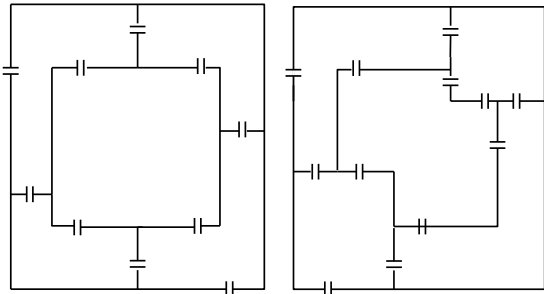
Rpta.

18. ¿Cuántas de las figuras siguientes se puede dibujar con un solo trazo continuo ni pasar dos veces por una misma línea?



Rpta.

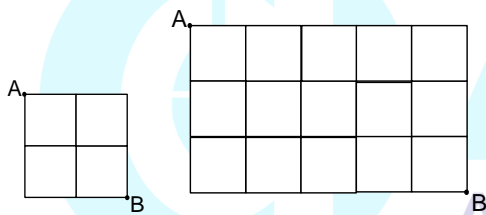
19. Aquí mostramos los planos de ciertos departamentos. ¿Cuál o cuales de ellos se prestan para pasar por todas las puertas de una sola vez empezando y terminando afuera?



(1)

(2)

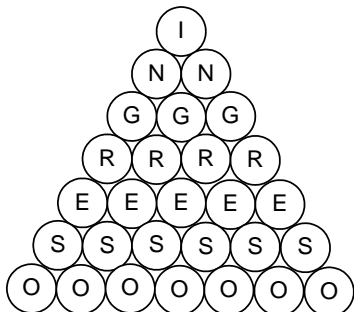
20. ¿Cuántas rutas mínimas diferentes se tiene para llegar al punto "B" partiendo de "A"?



(I)

(II)

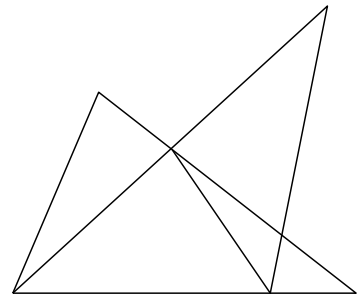
21. De cuántas maneras puedo leer "INGRESO" en la siguiente distribución



ADICIONALES

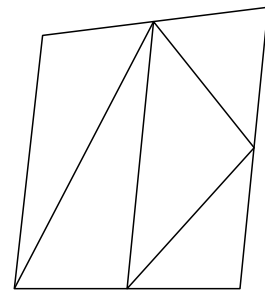
1. En la figura ¿Cuántos triángulos hay?

- f) 8
- g) 9
- h) 10
- i) 11
- j) 12



2. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura?

- f) 6
- g) 7
- h) 8
- i) 9
- j) 10



3. En nuestro tablero de ajedrez trazamos la diagonal principal, ¿Cuántos triángulos contaremos como máximo?

- a) 72
- b) 86
- c) 98
- d) 110
- e) 126

4. ¿Cuántos cuadriláteros que por lo menos tengan un asterisco hay en la siguiente figura?



- a) 36
- b) 49
- c) 75
- d) 81
- e) 69

5. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

- A) 40
- B) 48
- C) 52
- D) 60
- E) 72

